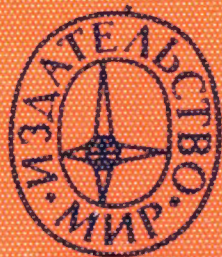


О.Ковальский

Обобщённые симметрические пространства

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} \tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_3 \\ -\tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ -\tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{array} \right) , \left(\begin{array}{ccc} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{array} \right)$$





Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

805

Oldřich Kowalski

Department of Mathematical Analysis
Faculty of Mathematics and Physics
Charles University
Prague/Czechoslovakia

Generalized Symmetric Spaces



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

О.Ковальский

Обобщённые симметрические пространства

Перевод с английского

Л.В. Сабина

Москва

• МИР •

1984

ББК 22.151.5

К 56

УДК 513.73

Ковальский О.

К 56 Обобщённые симметрические пространства: Пер. с англ. - М.:
Мир, 1984. - 240 с.

Небольшая книга чешского геометра посвящена новому и интенсивно развивающемуся направлению в дифференциальной геометрии однородных пространств. Содержит обстоятельное введение в теорию, новые результаты. Пригодна для первоначального ознакомления с предметом.

Для математиков разных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

К 1702040000 - 278 16 - 84, ч. 1
041(01) - 84

ББК 22.151.5

513.73

Редакция литературы по математическим наукам

Ольдржих Ковальский

ОБОБЩЁННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Ст. научный редактор В.И. Авербух. Мл. научный редактор
Л.А. Макарова. Художник Е.И. Волков. Художественный редактор
В.И. Шаповалов. Технический редактор Г.Б. Алюлина. Корректор
Т.П. Пашковская

ИБ № 3619

Подписано к печати 14.12.83. Формат 60 x 90 1/16. Бумага офс.
№ 1. Объём 7,50 бум. л. Усл. печ. л. 15,00. Усл. кр.-отт. 15,26.
Уч.-изд. л. 12,53. Изд. № 1/3059. Тираж 3400 экз. Зак.65
Цена 1 р. 90 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский
пер. 2

Московская типография № 9 Союзполиграфпрома при Государственном
Комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли, Волочаевская, 40

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Геометрия многолика. Но некоторые её лики проглядывают весьма явно, в то время как другие подёрнуты дымкой тумана, не позволяющего разглядеть детали. Временами живительный ветер перемен перегоняет туман с места на место, и то, что было скрыто, отчётливо проступает, а в морщинах того, что еще вчера виделось столь отчётливо, сгущается непроницаемая мгла. Сегодня, в век мощной топологической экспансии, топологический лик геометрии настолько привычен, что представляется многим её истинным (и единственным!) лицом, несмотря на тот очевидный факт, что лик этот нарисован на арифметическом холсте координатных окрестностей (склеенных в многообразие). Но не всегда было так, и на заре математики, во времена Эвклида, лик (геометрической) алгебры явно доминировал, а топологические черты геометрии едва ощущались, скорее пугая, чем радуя геометров химерами вроде несоизмеримых отрезков. Декарт координатизировал и тем самым арифметизировал (а не алгебраизировал, как иногда ошибочно пишут) геометрию. Впрочем, вернее было бы сказать, что геометрия всегда имела этот арифметический (координатный) лик, а Декарт первым его ясно разглядел. Отцы дифференциального исчисления, Лейбниц и Ньютон, ввели в геометрию анализ, превратив её в дифференциальную геометрию (последние штрихи к этой маске анализа на лице геометрии добавил Монж). Конечно, всегда были люди, действовавшие наперекор традициям и моде — достаточно вспомнить про синтетическую проективную геометрию. Правда, окончательный плод этих усилий — "геометрическая алгебра" — был позже, увы, отлучён от геометрии и объявлен частью чистой алгебры (хотя эта часть и признаётся весьма своеобразной).

Только после титанических усилий Софуса Ли и Феликса Клейна печать безраздельного господства анализа стала исчезать с лица геометрии, и оно начало приобретать благородные алгебраические

черты. Итоговую черту подвел Эли Картан, введя замечательный класс симметрических римановых пространств.

Сейчас все знают, что геометрия — это стык, где взаимодействуют различные структуры (алгебры, топологии, анализа и т.д.). Однако распространено ошибочное мнение, что некоторые структуры этого взаимодействия "заверщены", другие же продолжают развиваться. В действительности, завершённых составляющих структур здесь нет, все они развиваются, но неравномерно. Нам представляется, что лик геометрии всегда так и будет мозаичным и фрагментарным. Более того, эта "королева наук", по-видимому, ведёт себя как марсианин из известного рассказа Брэдбери, являя эту мозаику каждому в иных пропорциях.

В то время как, в связи с всесильной модой, исследования последнего времени по топологическим структурам геометрии у нас довольно хорошо известны (по переводам книг, обзорным статьям), недавние исследования по алгебраическим структурам геометрии нашей математической общественности почти неизвестны. Многие представляют себе, что вершина здесь — группы Ли и симметрические пространства Э. Картана. Между тем за последние двадцать лет произошли замечательные сдвиги. Обнаружилось, что не только группы, но и такие экзотические структуры неассоциативной алгебры, как квазигруппы, лупы, одули, геоодулярные структуры играют ключевую роль в дифференциальной геометрии. Более того, алгебраически, по-видимому, феномен кривизны в дифференциальной геометрии и определяется (в основном) неассоциативностью. Это приводит к некоторой программе изучения гладких алгебраических структур, далеко обобщающей первоначальный замысел С. Ли.

Пионерской и выдающейся, опередившей время работой в этом направлении была статья академика А.И. Мальцева [М'] (1955 г.), хотя он и не имел в виду связи с геометрией. Роль квазигрупп и луп в дифференциальной геометрии долгое время казалась незначительной. Разве лишь в теории тканей [Бл'] находили они применение. Ситуация изменилась после того, как Лооз (см., например, [LoI]) показал, что симметрическое пространство есть гладкая левая квазигруппа (идемпотентная, левообратимая, леводистрибутивная). Некоторое обобщение этой конструкции привело Леджера [L I] к понятию S-структуры — каковое и является по существу предметом рассмотрения лежащей перед читателем книги. Положение дел здесь такое, что эта алгебраическая структура на многообразии автоматически порождает геометрию в виде редуktивной аффинной связности, тесно связанной со структурой квазигруппы. Далее, Киккавой [Ki]

и мною [Ca7]' была выяснена фундаментальная роль луп в конструкции произвольного пространства аффинной связности (геодезическая лупа и одуль точки). Выявилась также замечательная связь левых луп и однородных пространств [Ca8]'.

Книга известного чешского математика Ольдржиха Ковальского представляет собой первую в мировой литературе попытку собрать воедино результаты об $\mathcal{S}$ -структурах, разбросанные по журнальным статьям. Изложение ведётся на геометрическом языке, в рамках теории аффинной связности, без обращения к продвинутой теории квазигрупп. Это подчас утяжеляет изложение и ведёт к известной архаичности формулировок, но это имеет и свою положительную сторону, если учесть, что читать её будет в первую очередь не алгебраист, а геометр, плохо знакомый с алгебраическими системами и квазигруппами. В дальнейшем мы предвидим появление изложения этих вопросов, больше ориентированного на алгебру (наподобие теории групп Ли).

Книга О. Ковальского посвящена исключительно $\mathcal{S}$ -структурам. Поэтому читателю, желающему составить более полное представление о предмете, рекомендуется просмотреть указанные выше работы, а также обзор [Ca6]'.

Читателю следует учитывать, что перед ним заметки лекционного типа, а не трактат с окончательной отработкой деталей, и не быть слишком придирчивым. При переводе мы исправили некоторые опечатки и неточности, снабдили текст примечаниями (пронумерованными подряд и помещёнными в конце книги; на них указывают арабские цифры со скобочкой) и дополнили библиографию. Специально для русского издания автор внёс в текст некоторые изменения и исправления, написал два добавления, а также сделал добавление к списку литературы. Вообще, весь перевод осуществлялся в тесном контакте с автором, за что мы хотели бы выразить ему искреннюю благодарность.

Нам представляется, что книга профессора О. Ковальского стимулирует интерес наших математиков к новому и перспективному направлению исследований на стыке алгебры и геометрии и её с пользой для себя прочтут многие геометры и алгебраисты.

Л. Сабинин

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

За время, прошедшее с момента выхода английского издания этой книги (1980 г.), в рассматриваемой области были получены некоторые новые результаты. Кроме того, в результате отклика математиков разных стран на книгу появилась возможность сделать библиографию более полной.

В русское издание включены два небольших добавления. Одно посвящено короткому доказательству теоремы Амброуза - Сингера об однородных римановых многообразиях; недавно прокатилась волна нового интереса к этой (двадцатипятилетней давности) теореме, и сама проблема, кажется, тесно связана с нашими методами исследований.

В другом добавлении дан краткий обзор некоторых недавних результатов учеников и сотрудников автора, а также недавних результатов "британской школы".

Как автором, так и переводчиком добавлены новые работы в библиографию. Мне бы хотелось выразить благодарность переводчику за его интерес к предмету, тщательный перевод книги и полезные предложения и комментарии. В частности, я признателен ему за то, что он взял на себя труд, связанный с более полным освещением результатов советских авторов, работы которых не всегда были мне доступны.

Надеюсь, что дифференциальные геометры в Советском Союзе (а я имею удовольствие быть другом многих из них) найдут в этой книге кое-что интересное для себя.

21 марта 1983

Ольдрик Ковальский

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой небольшой книге изложена элементарная теория обобщённых симметрических пространств. "Элементарная" означает здесь, что не привлекаются топологические инварианты и "высшие" разделы алгебры (типа теории корневых систем). Существуют и более изощрённые теории, в которых получены аналоги весьма глубоких результатов теории обычных симметрических пространств $[WoG]$, $[Gr]$, однако в этих теориях приходится налагать существенные ограничения на основную группу рассматриваемого пространства (например, предполагать её полупростоту). О некоторых из таких результатов более высокого уровня мы говорим вкратце в добавлении 5. В нашем изложении на группы никаких ограничений подобного рода не налагается.

Мы старались развивать теорию как часть теории римановых пространств или пространств аффинной связности, а не как часть теории групп Ли и алгебр Ли. (Теоретико-групповой подход представлен в книге $[ФеЗ]'$.) До сих пор выражение "обобщённое симметрическое пространство" использовалось обычно лишь как неформальное прозвище для различных геометрических или теоретико-групповых объектов (как правило, для тройки (G, H, σ) , где G - группа Ли, H - её замкнутая подгруппа, а σ - автоморфизм группы G , необязательно инволютивный). Мы попытались придать точное и чисто геометрическое значение этому выражению; основными новыми понятиями являются "обобщённое симметрическое риманово пространство" и "обобщённое аффинное симметрическое пространство". (В том же духе мы заменяем теоретико-групповое понятие редуktивного пространства более геометрическим понятием аффинного редуktивного пространства.)

В этой книге нет специального раздела, посвящённого классической теории симметрических пространств (зачем повторять Хелгасона или Лооза?), и ссылаемся на эту теорию мы также лишь в

исключительных случаях (здесь неподходящее место, чтобы воздавать должное Э. Картану и другим великим людям прошлого). Добрая половина книги уделена вопросам, не имеющим аналогов в теории обычных симметрических пространств, и в частности подробному изучению собственных чисел обобщённых симметрий.

Мы оставили в стороне также теорию обобщённых симметрических псевдоримановых пространств, хотя в свете значительного прогресса, достигнутого в теории обычных симметрических псевдоримановых пространств ($[B]$, $[CP1]$, $[CP2]$, $[CW]$), такое обобщение, несомненно, было бы интересным. (См. добавление 5.)

Далее, эта книга – не обзор того, что было сделано в области различных обобщений симметрических пространств, это просто заметки лекционного типа с ограниченным предметом рассмотрения. Отправным пунктом для них послужили в первую очередь работы А. Леджера и О. Лооза, а также некоторых других авторов. Насколько мне известно, единственная обзорная статья по обобщениям симметрических пространств была опубликована В.И. Ведерниковым и А.С. Феденко в 1976 г. (см. $[ВеФ]'$).

Приведённая в конце книги библиография не претендует на роль собрания престижных работ и знаменитых имён. В неё просто включены те работы, которые непосредственно связаны с нашей темой. Так что одни из этих работ могут быть важнее, чем другие.

Теперь коротко о содержании книги.

В главе 0 мы просто стараемся увлечь читателя нашим предметом. Она содержит основную информацию об обобщённых симметрических римановых пространствах.

Глава 1 – краткий экскурс в теорию редутивных однородных пространств. Способ изложения здесь чуть отличается от традиционного. Параграф об аффинных редутивных пространствах представляет, пожалуй, и самостоятельный интерес.

В главе 2 мы имеем дело с некой разновидностью дифференцируемых дистрибутивных группоидов – так называемыми регулярными s -многообразиями. Дается обобщение понятия абстрактного симметрического пространства, введённого О. Лоозом. Изучаются каноническая связность, автоморфизмы и трансекции. Кроме того, доказывается, что всякое регулярное s -многообразие является редутивным однородным пространством.

В главе 3 мы обобщаем теорию локально-симметрических пространств. Далее, мы вводим инфинитезимальные модели регулярных S -многообразий, характеризующие последние с точностью до локального изоморфизма. (Регулярные S -многообразия можно характеризовать также их "обобщёнными симметрическими" алгебрами Ли.) В последнем параграфе изучаются инвариантные почти-комплексные структуры на локально-регулярных S -многообразиях.

В главе 4 рассматриваются инвариантные подмногообразия и различные операции над регулярными S -многообразиями; некоторые из них не имеют аналогов в теории обычных симметрических пространств.

Глава 5 посвящена следующей теме. В обычном симметрическом пространстве всегда существует каноническое семейство симметрий. В обобщённом римановом или аффинном симметрическом пространстве мы, как правило, имеем много допустимых семейств (обобщённых) симметрий. Ни одно из них не является "каноническим", но некоторые из них, как говорят, "отмечены". Если представлять обобщённые симметрические пространства при помощи отмеченных семейств симметрий, то это позволяет лучше вникнуть в проблему классификации таких пространств. При этом оказывается необходимым изучить связи между собственными числами обобщённых симметрий, что представляет собой интересную комбинаторную задачу.

В главе 6 приводится локальная классификация обобщённых симметрических римановых пространств размерности $n \leq 5$. Полные доказательства даны только для размерностей 3 и 4. Мы ограничиваемся пространствами, которые не являются римановыми симметрическими, — классификация последних известна из знаменитого списка Э. Картана.

В главе 7 приведена локальная классификация обобщённых аффинных симметрических пространств размерностей 3 и 4. Доказательства (содержащие длинные и тяжёлые выкладки) опущены. Снова мы не включаем в классификацию обычные аффинные симметрические пространства. (В противоположность риманову случаю, полная классификация аффинных симметрических пространств известна лишь для пространств с полупростой группой, см. [В].)

Для чтения книги требуется знакомство с основными фактами современной дифференциальной геометрии (см., например, [Кн 1,2]') и теории групп Ли и алгебр Ли (см., например, [Ше]'). Читатель может также обращаться к приложениям А и В.

Благодарности. Автор выражает признательность А. Грау за ценные указания и замечания и П. Домбровскому за огромную поддержку и помощь.

Прага, сентябрь 1978

Ольдржих Ковальский

СПИСОК СТАНДАРТНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

M	дифференцируемое многообразие размерности n класса C^∞ ("гладкое многообразие")
$T_p(M), M_p$	касательное пространство многообразия M в точке $p \in M$
$T_p^*(M), M_p^*$	кокасательное пространство многообразия M в точке $p \in M$
$\mathfrak{Z}(V)$	тензорная алгебра над векторным пространством V
φ_*, φ_{*p}	касательное отображение для гладкого отображения φ (на данном многообразии, соотв. в точке p)
$T(M)$	касательное расслоение многообразия M
$L(M)$	главное расслоение реперов многообразия M
$\mathcal{F}(M)$	кольцо всех гладких функций на M
$\mathfrak{X}(M)$	алгебра Ли всех гладких векторных полей на M
$\mathfrak{Z}(M)$	тензорная алгебра всех гладких векторных полей на многообразии M
G°	компонента единицы группы Ли G
K_o	подгруппа изотропии данной группы преобразований K (действующей на M) в точке $o \in M$
R_x, L_x	правые и левые сдвиги данной группы Ли
$\exp$	экспоненциальное отображение в единицу данной группы Ли G (рассматриваемое как отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в группу G .)

Ad_G, Ad	представление группы G её внутренними автоморфизмами
$ad_G (ad_{\mathfrak{g}})$	присоединённое представление группы Ли G (соотв. алгебры Ли $\mathfrak{g}$) на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G
ad	сокращённое обозначение для $ad_G, ad_{\mathfrak{g}}$
$\mathcal{L}_X$	производная Ли относительно $X \in \mathfrak{X}(M)$
$[,]$	скобка Ли в данной алгебре Ли
$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$	векторное подпространство, порождённое всеми элементами вида $[X, Y], X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}$ где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — векторные подпространства данной алгебры Ли
∇, ∇_X	аффинная связность на M , соотв. ковариантная производная относительно $X \in \mathfrak{X}(M)$
Exp_p	экспоненциальное отображение в точке p для данного многообразия аффинной связности
$P(u_0)$	подрасслоение голономии (связности), содержащее репер $u_0 \in L(M)$.
$\Phi(u_0)$	группа голономии с опорным репером u_0
$\Psi(p)$	группа голономии с опорной точкой p
$\Phi^*(u_0), \Psi^*(p)$	суженные группы голономии
$I(M, g), I(M)$	группа всех изометрий риманова многообразия
$A(M, \nabla), A(M)$	группа всех аффинных преобразований многообразия аффинной связности

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СОГЛАШЕНИЯ

Все многообразия, отображения, тензорные поля и т.д. считаются гладкими (класса C^∞), если не оговорено противное.

Конец доказательства мы отмечаем символом $\square$, если оно ничем не прерывалось, и символом $\square\square$, если оно было ранее на время прервано.

Звёздочка $*$ указывает на результаты, публикуемые здесь впервые (так что на них нет литературных ссылок).

Глава О

Обобщённые симметрические римановы пространства

РИМАНОВЫ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы напомним некоторые элементарные свойства римановых симметрических пространств.

Пусть (M, g) — риманово многообразие и ∇ — его риманова связность. Пусть $p \in M$ — фиксированная точка, а N_0 — симметричная нормальная окрестность начала в касательном пространстве M_p (т.е. для $X \in N_0$ мы всегда имеем $-X \in N_0$). Положим $N_p = \text{Exp}_p N_0$. Множество N_p есть "симметричная" нормальная окрестность точки p .

Для каждой точки $x \in N_p$ рассмотрим геодезическую $t \mapsto \gamma(t)$ в N_p , такую что $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = x$. Положим $x' = \gamma(-1)$. Тогда отображение $x \mapsto x'$ окрестности N_p на себя есть локальный диффеоморфизм, который называется локальной геодезической симметрией относительно точки p .

Многообразие (M, g) называют римановым локально-симметрическим, если для каждой точки $p \in M$ существует открытая окрестность N_p , такая что локальная геодезическая симметрия в N_p есть изометрия. Как хорошо известно, риманово многообразие (M, g) является римановым локально-симметрическим, если и только если $\nabla R = 0$.

Далее, говорят, что связное многообразие (M, g) есть риманово (глобально-) симметрическое многообразие, если каждая точка $p \in M$ является изолированной неподвижной точкой некоторой инволютивной изометрии S_p многообразия (M, g) . (Такая симметрия S_p называется симметрией в точке p .) Для касательного отображения $S_p = (S_p)_*p$ мы легко получаем $S_p = -\text{Id}$. Отсюда видно, что связное многообразие (M, g) является римановым симметрическим, если и только если оно риманово локально-симметрическое и для каждой точки p локальная геодезическая симметрия относительно точки p может быть продолжена до изометрии S_p многообразия (M, g) . Последнее

условие всегда выполнено, если (M, g) — связное, односвязное и полное многообразие.

На римановом симметрическом пространстве (M, g) множество симметрий $\{s_p : p \in M\}$ определяется единственным образом, и для любых двух точек $x, y \in M$

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x, \text{ где } z = s_x(y). \quad (1)$$

Действительно, сравним касательные отображения в точке y . Для $v \in T_y(M)$ имеем

$$(s_x \circ s_y)_* y(v) = (s_x)_* y(-v) = -(s_x)_* y(v),$$

$$(s_z \circ s_x)_* y(v) = (s_z)_* z((s_x)_* y(v)) = -(s_x)_* y(v),$$

потому что $(s_y)_* y$ и $(s_z)_* z$ равны $-\text{Id}$ в соответствующих касательных пространствах. Согласно теореме VI (см. приложение B), обе части формулы (1) равны на M .

В заключение напомним, что риманово симметрическое пространство всегда является полным и группа всех его изометрий транзитивна. Далее, если G — компонента единицы группы всех его изометрий, а G_0 — группа изотропии группы G в фиксированной точке, то G/G_0 каноническим образом является редуктивным однородным пространством.

РИМАНОВЫ S-СТРУКТУРЫ

Рассмотрим теперь некоторые важные обобщения предыдущей ситуации.

Пусть (M, g) — связное риманово многообразие. Всякую изометрию многообразия (M, g) с изолированной неподвижной точкой $x \in M$ будем называть симметрией многообразия (M, g) в точке x .¹⁾ Ясно, что если s_x есть симметрия многообразия (M, g) в точке x , то касательное отображение $S_x = (s_x)_* x$ является ортогональным преобразованием пространства M_x , не имеющим неподвижных векторов (кроме нуля).

Мы здесь не требуем инволютивности симметрии s_x в точке x , и, очевидно, такие симметрии определены, вообще говоря, не единственным образом. Наша цель — расширить класс римановых симметрических пространств до возможно более широкого класса римановых многообразий, которые не обязательно допускают обычные геодезические симметрии, но всё ещё допускают обобщённые симметрии в вышеуказанном смысле. Следующая теорема показывает, что однородность

имеет место в самой общей ситуации.

Теорема 0.1 (Ф. Бриккелл). Пусть (M, g) — связное риманово многообразие, допускающее по крайней мере одну симметрию s_x в каждой точке $x \in M$. Тогда группа $I(M)$ всех изометрий транзитивна на M .

Следствие 0.2. а) (M, g) допускает согласованную аналитическую структуру.

б) (M, g) полно.

Теорема 0.1 вытекает из следующего более специального результата:

Теорема 0.3. Пусть (M, g) — связное риманово многообразие и $I(M)$ — группа всех его изометрий, наделённая компактно-открытой топологией. Пусть $\{s_x : x \in M\}$ — семейство симметрий на многообразии (M, g) (по одной симметрии в каждой точке). Тогда замыкание $Cl(\{s_x\})$ в $I(M)$ группы, порождённой множеством $\{s_x : x \in M\}$, есть транзитивная группа Ли преобразований.

Доказательство (см. [L0]). Хорошо известно, что группа всех изометрий $I(M)$ связного риманова многообразия (M, g) есть группа Ли относительно компактно-открытой топологии; в частности, она локально-компактна. Для доказательства последнего факта часто используется следующий промежуточный результат (см., например, [КН1]): пусть $\{g_n\}$ — последовательность в $I(M)$, такая что $g_n(x)$ сходится для некоторого $x \in M$; тогда существует подпоследовательность $\{g_{n_i}\}$ последовательности $\{g_n\}$, которая сходится в $I(M)$.

Тот же результат верен, если мы заменим $I(M)$ замкнутой подгруппой $G \subset I(M)$. Пусть теперь $G(x)$ есть G -орбита точки x , а y — точка из замыкания этой орбиты. Мы заключаем, что $y = g(x)$ для некоторого $g \in G$. Отсюда вытекает

Лемма. Если $G \subset I(M)$ — замкнутая подгруппа, то все G -орбиты замкнуты в M .

Возьмём $G = Cl(\{s_x\})$. Пусть $x \in M$ — фиксированная точка и U — её нормальная окрестность радиуса a . Пусть y — произвольная точка в U , а r — расстояние от x до G -орбиты $G(y)$ точки y : $r = \inf_{f \in G} d(x, f(y))$.

Используя тот факт, что орбита $G(y)$ замкнута, легко показать, что для некоторого $z \in G(y)$ мы имеем $r = d(x, z)$. Предположим, что r положительно. Тогда существует единственный сегмент геодезической длины r , соединяющий x и z . Пусть w — точ-

ка этого сегмента геодезической, находящаяся между x и z . Рассмотрим действие на z симметрии s_w в точке w . Ясно, что $s_w(z) \in G(y)$, поскольку $z \in G(y)$ и $s_w(z) \neq z$.

Так как точки x, z, w и $s_w(z)$ все лежат в U и неравенство треугольника имеет место для любого геодезического треугольника в U , то $d(x, s_w(z)) < d(x, w) + d(w, s_w(z)) = d(x, w) + d(w, z) = d(x, z) = r$, в противоречие с тем фактом, что $r = d(x, G(y))$. Итак, $r = 0$, откуда $x \in G(y)$. Следовательно,

$y \in G(x)$, и так как y — произвольная точка из U , мы имеем $U \subset G(x)$. Таким образом, $G(x)$ содержит открытую окрестность точки x , а поскольку группа G транзитивна на каждой орбите, то $G(x)$ — открытое множество. А так как $G(x)$ также и замкнуто, то $G(x) = M$ и группа G транзитивна на M .

Наконец, G — группа Ли, потому что G — замкнутая подгруппа в $I(M)$. $\square$

Следствие 0.2 устанавливает хорошо известные свойства римановых однородных пространств. Дадим набросок его доказательства.

а) Рассмотрим группу Ли $G = I(M)$ и её подгруппу изотропии H в точке $0 \in M$. Группа G и пространство $M \approx G/H$ допускают согласованные аналитические структуры, такие что действие G на G/H аналитично. Так как метрика g инвариантна относительно транзитивного и аналитического действия группы G на G/H , то она аналитична. (См. [Хе]'.)

б) Так как группа $I(M)$ транзитивна на M , то мы можем выбрать замкнутые шары одного и того же радиуса r для всех точек многообразия (M, g) . Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в M . Для достаточно большого $N > 0$ шар $B(x_N; r)$ содержит все x_n с $n > N$ и, значит, $\{x_n\}$ сходится в $B(x_N; r)$. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующее

Определение 0.4. Семейство $\{s_x : x \in M\}$ симметрий связного риманова многообразия (M, g) называется (римановой) s-структурой на (M, g) .

В этой терминологии теорема 0.1 может быть сформулирована следующим образом:

Если связное риманово многообразие (M, g) допускает по крайней мере одну s-структуру, то оно является однородным римановым пространством.

Определение 0.5. Говорят, что s-структура $\{s_x : x \in M\}$ есть структура порядка k (где k — целое ≥ 2), если $(s_x)^k = id$

для всех $x \in M$ и $(s_x)^l \neq id$ для $l < k$.

Очевидно, что риманово многообразие симметрическое, если и только если оно допускает s -структуру порядка 2 (такая s -структура, если она существует, единственна). Естественно задать вопрос, являются ли римановы многообразия, допускающие s -структуры конечного порядка, более специальными объектами, чем римановы многообразия, которые допускают лишь общие s -структуры. Как показал А. Дэйке, ответ на этот вопрос отрицателен:

Теорема 0.6. Если связное риманово многообразие допускает какую-нибудь s -структуру, то оно допускает s -структуру конечного порядка.

Доказательство основано на следующей лемме:

Лемма 0.7. Пусть s_p — симметрия многообразия (M, g) в точке $p \in M$. Обозначим через $Cl(s_p)$ замыкание в $I(M, p)$ группы, порождённой симметрией s_p . (Здесь $I(M, p)$ обозначает подгруппу изотропии группы $I(M)$ в точке p .) Тогда в $Cl(s_p)$ существует симметрия s'_p конечного порядка.

Доказательство. Мы можем считать, что s_p — симметрия бесконечного порядка. Обозначим через $S_p = (s_p)_{*p}$ касательное отображение для s_p в точке p , и пусть $I(M_p)$ есть множество $\{g_{*p} : g \in I(M, p)\}$. Очевидно, что $I(M_p)$ — замкнутая подгруппа в ортогональной группе $O(M_p)$ и $S_p \in I(M_p)$. Существенный шаг — доказать, что замыкание $Cl(S_p)$ группы, порождённой отображением S_p в $I(M_p)$, содержит ортогональное преобразование S'_p , такое что

- (i) S'_p — преобразование конечного порядка;
- (ii) все собственные числа преобразования S'_p отличны от 1.

Так как группа $Cl(S_p)$ компактна и абелева, то она имеет вид $T^k \times F$, где T^k — k -мерный тор ($k \geq 1$), а F — конечная группа порядка, скажем, l . Пусть e обозначает единичный элемент группы F . Тогда $T'^k = T^k \times \{e\}$ — компонента единицы в $Cl(S_p)$. Пусть $\mathcal{U}$ обозначает множество всех элементов в $Cl(S_p)$, удовлетворяющих условию (ii). Тогда $\mathcal{U} \ni S_p$ — открытое множество, и имеется окрестность $\mathcal{V}$ единицы в T'^k , такая что $S_p \cdot \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Очевидно, что множество $\mathcal{V}^{(l)} = \{v^l : v \in \mathcal{V}\}$ тоже есть окрестность единицы в T'^k . Далее, $(S_p)^l \in T'^k$ и, таким образом, множество $(S_p)^l \mathcal{V}^{(l)}$ есть окрестность элемента $(S_p)^l$ в T'^k . Хорошо известно, что множество всех элементов конечного порядка в T'^k плотно, и, значит, существует элемент $v_0 \in \mathcal{V}$, такой что $(S_p)^l (v_0)^l =$

элемент конечного порядка. Следовательно, $S_p v_0$ — конечного порядка и в то же время $S_p v_0 \in \mathcal{W}$. Итак, мы можем положить $S'_p = S_p v_0$.

Теперь, так как $S'_p \in Cl(S_p)$, существует изометрия $s'_p \in Cl(s_p)$, такая что $S'_p = (s'_p)_* p$. Согласно (ii), для преобразования S'_p нулевой вектор является единственным неподвижным вектором в M_p , и, значит, s'_p имеет точку p в качестве изолированной неподвижной точки. (Мы используем нормальные координаты.) Итак, s'_p — симметрия конечного порядка. $\square$

Теорема 0.6 легко следует из теоремы 0.1. Действительно, для каждой точки $x \in M$ возьмём изометрию $q_x \in I(M)$, такую что $q_x(p) = x$. Тогда можно определить s -структуру $\{s'_x : x \in M\}$ конечного порядка таким образом, чтобы s'_p было симметрией конечного порядка в точке p , а $s'_x = q_x \circ s'_p \circ q_x^{-1}$ для $x \in M$. $\square \square$

Вышеизложенные результаты составляют главную часть того, что известно в общей ситуации (см. также добавление 3 в конце книги). Если мы хотим развить более глубокие аналогии с теорией римановых симметрических пространств, то нужны более специальные структуры. К счастью, до сих пор не было использовано свойство (1). Соответствующий класс пространств будет изучен в следующем параграфе. Мы также увидим, что этот класс действительно служит расширением класса римановых симметрических пространств.

РЕГУЛЯРНЫЕ s -СТРУКТУРЫ

В дальнейшем всегда будем рассматривать риманово многообразие с s -структурой как вещественное аналитическое многообразие (ср. 0.2).

Определение 0.8. Говорят, что s -структура $\{s_x\}$ на римановом многообразии (M, g) регулярна, если она удовлетворяет условию

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x, \quad z = s_x(y) \quad (1)$$

для любых двух точек $x, y \in M$.²⁾

Пусть на многообразии (M, g) задана s -структура $\{s_x : x \in M\}$. Через S всегда будем обозначать тензорное поле типа $(1, 1)$, определяемое соотношением $S_x = (s_x)_* x$ для всех $x \in M$. Имеет место следующая характеристика регулярности:

Предложение 0.9. s -структура $\{s_x\}$ на связном многообразии (M, g) регулярна, если и только если тензорное поле S ин-

вариантно относительно любой симметрии S_x , т.е.

$$S_{x*}(S) = S, \quad x \in M. \quad (2)$$

Доказательство. Переходя в формуле (1) к касательным отображениям, получаем в точке y равенство $(S_x)_*y \circ S_y = S_y \circ (S_x)_*y$. Отсюда следует, что $S_{x*} \circ S = S \circ S_{x*}$ на касательном расслоении $T(M)$, а это и есть соотношение (2). Обратно, так как изометрия однозначно определяется одним лишь касательным отображением, то и соотношение (1) следует из (2). $\square$

Примеры 0.10. 1. Семейство геодезических симметрий риманова симметрического пространства является регулярной s -структурой.

2. Пусть M — евклидова плоскость, φ — угол, заключённый между 0 и 2π , и пусть S_x — вращение вокруг x на угол φ для любой точки $x \in M$. Тогда $\{S_x\}$ — регулярная s -структура.

Отметим, что пример 2 отнюдь не очевиден, если пытаться проверить регулярность непосредственно, однако он очевидным образом следует из предложения 0.9.

Наша следующая цель — доказать две теоремы о регулярных s -структурах.

Теорема 0.11. Любая регулярная риманова s -структура — аналитическая. Более точно, если многообразие (M, g) допускает какую-либо регулярную s -структуру $\{S_x\}$ и если (M, g) наделено канонической аналитической структурой, то отображение $(x, y) \mapsto S_x(y)$ аналитическое.³⁾

Теорема 0.12. Если многообразие (M, g) допускает регулярную s -структуру, то оно также допускает регулярную s -структуру конечного порядка.

Нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 0.13. Пусть $\{S_x\}$ — регулярная s -структура на многообразии (M, g) . Тогда тензорное поле S инвариантно относительно действия группы $Cl(\{S_x\})$, и для любой точки $p \in M$ симметрия S_p принадлежит центру подгруппы изотропии $Cl(\{S_x\}, p)$.

Доказательство. Инвариантность S и включение $S_p \in Cl(\{S_x\}, p)$ очевидны (предложение 0.9). Теперь пусть $q \in Cl(\{S_x\}, p)$, тогда свойство $q_*(S) = S$ влечёт $q_*p \circ S_p = S_p \circ q_*p$ и

$$(q \circ S_p \circ q^{-1})_*p = q_*p \circ S_p \circ q_*^{-1}p = S_p = (S_p)_*p,$$

откуда $q \circ S_p \circ q^{-1} = S_p$. $\square$

Лемма 0.14. Пусть G — транзитивная группа Ли изометрий многообразия (M, g) , а $G(p)$ обозначает группу изотропии в точке $p \in M$. Предположим, что существует симметрия s_p в точке p , принадлежащая центру группы $G(p)$. Тогда существует в точности одна s -структура $\{s_x : x \in M\}$ с начальным значением s_p , такая что её касательное тензорное поле S инвариантно относительно действия группы G . Эта s -структура регулярна.

Доказательство. Для каждой точки $x \in M$ положим $s_x = q \circ s_p \circ q^{-1}$, где $q \in G$ — любой элемент, для которого $q(p) = x$. Тогда s_x есть симметрия в точке x , которая не зависит от выбора q , и тем самым семейство $\{s_x : x \in M\}$ определено корректно. Далее, для любых $y \in M$ и $q \in G$ имеем (используя вспомогательный элемент $q' \in G$, такой что $q'(p) = y$).

$$q \circ s_y \circ q^{-1} = q \circ q' \circ s_p \circ (q')^{-1} \circ q^{-1} = (q \circ q') \circ s_p \circ (q \circ q')^{-1} = s_{q(y)}; \quad (3)$$

Переходя к касательным отображениям, получаем $q_* y \circ S_y = S_{q(y)} \circ q_* y$, т.е. тензорное поле S инвариантно относительно действия группы G . С другой стороны, G -инвариантное тензорное поле S однозначно определяется своим начальным значением s_p , и тем самым желаемая s -структура $\{s_x\}$ однозначно определена. Поскольку $s_x \in G$ для каждого $x \in M$, то s -структура $\{s_x\}$ регулярна в силу (3). $\square$

Доказательство теоремы 0.11. Пусть $\{s_x\}$ — регулярная s -структура на многообразии (M, g) и $p \in M$ — фиксированная точка. По теореме 0.3 группа $G = \mathcal{C}(\{s_x\})$ транзитивна на M , и, согласно доказательству следствия 0.2, имеются аналитические структуры на G и на $G/G(p) \approx M$ (ассоциированные с компактно-открытой топологией), такие что действие G на M аналитично. Поэтому найдётся окрестность U точки p , для которой существует аналитическое сечение $h: U \rightarrow G$ расслоенного пространства $\pi: G \rightarrow M$. Согласно предыдущим леммам, для каждого $x \in U$ мы имеем $s_x = h(x) \circ s_p \circ h^{-1}(x)$. Далее, s_p аналитично, потому что $s_p \in G$, и, следовательно, отображение $(x, y) \mapsto s_x(y)$ аналитично на $U \times M$. В итоге мы можем заключить, что это отображение аналитично на $M \times M$. $\square \square$

Из теоремы 0.11 вытекает

Следствие 0.15. Для регулярной s -структуры $\{s_x\}$ касательное тензорное поле S всегда аналитично.

Доказательство теоремы 0.12. Предположим, что многообразие (M, g) допускает регулярную s -структуру $\{s_x\}$, и пусть $s'_p \in \mathcal{C}(s_p)$

– симметрия конечного порядка. Тогда s'_p вместе с s_p принадлежит центру $\mathcal{C}(\{s_x\}_p)$. Согласно теореме 0.3 и лемме 0.14, на M существует регулярная s -структура $\{s'_x\}$ с начальным значением s'_p . Так как каждая симметрия s'_x имеет вид $q \circ s'_p \circ q^{-1}$, то все симметрии s'_x , $x \in M$ того же порядка, что и s'_p . $\square \square$

Теперь мы введём некоторые основные для нашей теории понятия.

Определение 0.16. Обобщённое симметрическое риманово пространство – это связное риманово многообразие (M, g) , допускающее регулярную s -структуру.

Определение 0.17. Говорят, что риманово многообразие (M, g) k -симметрично ($k \geq 2$), если оно допускает регулярную s -структуру порядка k 4).

В соответствии с теоремой 0.12 каждое обобщённое симметрическое риманово пространство является k -симметрическим для некоторого $k \geq 2$. Значит, мы можем ввести

Определение 0.18. Порядком обобщённого симметрического риманова пространства (M, g) назовём наименьшее целое $k \geq 2$, для которого (M, g) k -симметрично.

Евклидова плоскость из примера 0.10 есть тривиальное k -симметрическое пространство для любого $k \geq 2$; значит, его порядок равен 2. С другой стороны, обобщённые симметрические римановы пространства порядка 2 суть не что иное, как римановы симметрические пространства. Так что для оправдания нашей общей теории нам нужно доказать существование пространств порядка $k > 2$. Это будет сделано в следующем параграфе.

Заметим, что единственными обобщёнными симметрическими римановыми пространствами размерности 2 являются, в силу их однородности, пространства постоянной кривизны. Таким образом, первый нетривиальный пример может встретиться лишь в размерности $n = 3$ или выше.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Начнём с некоторых предварительных рассуждений. Пусть (M, g) – риманово однородное пространство, т.е. однородное многообразие $M = G/H$, наделённое G -инвариантной римановой метрикой. Пусть $\pi: G \rightarrow M$ – каноническая проекция, e – единица группы G , а $o = \pi(H)$ – начало в M .

Предложение 0.19. Пусть G допускает автоморфизм ϕ , такой что:

(i) $(G^\phi)^\circ \subset H \subset G^\phi$, где G^ϕ — множество неподвижных точек автоморфизма ϕ и $(G^\phi)^\circ$ — его компонента единицы;

(ii) ϕ^k равен тождественному автоморфизму, а ϕ^l отличен от тождественного автоморфизма для $l < k$;

(iii) преобразование s многообразия M , определяемое равенством $\pi \circ \phi = s \circ \pi$, сохраняет метрику в начальной точке o многообразия M .

Тогда M есть k -симметрическое риманово пространство.

Доказательство. Предположим сначала, что G действует эффективно на пространстве классов G/H . отождествим элементы из G с соответствующими преобразованиями многообразия $M = G/H$. Выберем $g \in G$ и $x \in M$.⁵⁾ Тогда $x = \pi(g')$ для некоторого $g' \in G$. Имеем

$$\begin{aligned} (s \circ g \circ s^{-1})(x) &= (s \circ g \circ s^{-1} \circ \pi)(g') \\ &= (s \circ g \circ \pi)(\phi^{-1}(g')) = (s \circ \pi)(g\phi^{-1}(g')) = (\pi \circ \phi)(g\phi^{-1}(g')) \\ &= \phi(g)[\pi(g')] = \phi(g)(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$s \circ g \circ s^{-1} = \phi(g) \quad \text{для каждого} \quad g \in G. \quad (4)$$

Итак, отображение $s \circ g \circ s^{-1}$ всегда будет изометрией. Выберем $x \in M$ и $g \in \pi^{-1}(x)$. Тогда касательные отображения

$$s_{*0}^{-1}: M_0 \longrightarrow M_0, \quad g_{*0}: M_0 \longrightarrow M_x \quad \text{и} \quad s_{*x} \circ g_{*0} \circ s_{*0}^{-1}: M_0 \longrightarrow M_{s(x)}$$

сохраняют метрику. Следовательно, отображение $s_{*x}: M_x \longrightarrow M_{s(x)}$ сохраняет метрику, и s есть изометрия многообразия M .

Для $x \in M$ определим изометрию s_x многообразия M формулой $s_x = g \circ s \circ g^{-1}$, где $g \in \pi^{-1}(x)$. Тогда s_x не зависит от выбора g . Действительно, для каждого $h \in H$ имеем $s \circ h \circ s^{-1} = \phi(h) = h$ и, значит, $h \circ s \circ h^{-1} = s$.

Очевидно, что $(s_x)^k = \text{id}$ для любого $x \in M$ и что k — наименьшее число с такими свойствами. Нам нужно доказать, что x — изолированная неподвижная точка изометрии s_x . Для этого достаточно доказать, что o — изолированная фиксированная точка преобразования s . Пусть элемент $X \in M_0$ таков, что $s_{*0}(X) = X$, а $\tilde{X} \in G_e$

таков, что $\pi_{*e}(\tilde{X}) = X$. Тогда $\phi_{*e}(\tilde{X}) = \tilde{X} + \tilde{Z}$, где $\tilde{Z} \in H_e$. Далее, $\phi_{*e}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}$ и $(\phi_{*e})^k(\tilde{X}) = \tilde{X} + k\tilde{Z} = \tilde{X}$, так как $(\phi_{*e})^k = \text{Id}$. Значит, $\tilde{Z} = 0$, а $\tilde{X}$ — неподвижная точка автоморфизма ϕ_{*e} . Мы делаем вывод, что $\tilde{X} \in H_e$ и $X = 0$. Так как s_{*0} не имеет ненулевых неподвижных векторов и s — изометрия многообразия M , заключаем, что 0 — изолированная неподвижная точка преобразования s .

Для доказательства формулы $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ напомним ещё раз, что $s \circ g \circ s^{-1} = \phi(g)$. Положим $s_x = g \circ s \circ g^{-1}$, $s_y = g' \circ s \circ (g')^{-1}$, где $x = g(0)$, а $y = g'(0)$. Тогда

$$(g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s^{-1})(0) = s_x(g'(0)) = s_x(y);$$

с другой стороны, $g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s^{-1} = g \circ \phi(g^{-1} \circ g') = g''$ принадлежит G . Следовательно,

$$s_x \circ s_y = g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s \circ (g')^{-1} = g'' \circ s \circ (g'')^{-1} \circ g \circ s \circ g^{-1} = s_{s_x(y)} \circ s_x.$$

Далее, если G действует на G/N не эффективно, то элементы $g \in G$, действующие как тождественное преобразование на G/N , образуют замкнутую нормальную подгруппу N группы G , такую что $N \subset H$. Здесь ϕ индуцирует автоморфизм $\tilde{\phi}$ группы Ли G/N . Мы можем написать $M = (G/N)/(H/N)$, и условия предложения 0.19 удовлетворяются для G/N , H/N и $\tilde{\phi}$. Кроме того, группа G/N действует эффективно на M . Отсюда и следует требуемый результат. $\square$

Пусть $M = G/H$ — однородное пространство. Обозначим через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно. Мы будем отождествлять $\mathfrak{g}$ с G_e и $\mathfrak{h}$ с H_e .

Предположим, что имеется подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, такое что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ (прямая сумма) и $\text{ad}(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ для всех $h \in H$. (В таком случае говорят, что однородное пространство G/H редуктивно; см. гл. I). Проекция $\pi: G \rightarrow G/H$ индуцирует касательное отображение $\pi_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow M_0$, которое тривиально на $\mathfrak{h}$ и является линейным изоморфизмом на $\mathfrak{m}$. Имея дело с фиксированным $\mathfrak{m}$, можно отождествить $\mathfrak{m}$ с M_0 посредством π_* .

Теперь предположим, что существует бинвариантная риманова метрика $\mathcal{B}$ на G , или, что эквивалентно, положительное скалярное произведение B на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(G)$ — группы всех внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда мы имеем каноническое редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно B . Действительно,

как B , так и $\mathfrak{h}$ являются $\text{ad}(H)$ -инвариантными, и, значит, $\mathfrak{h}$ также $\text{ad}(H)$ -инвариантно. Сужение B на $\mathfrak{h}$ есть положительно-определённое скалярное произведение. Отсюда мы получаем положительно-определённое скалярное произведение q_0 в M_0 , инвариантное относительно линейного изотропного представления подгруппы H в касательном пространстве $M_0 = (G/H)_0$. Таким образом, q_0 определяет единственную G -инвариантную риманову метрику q на M . Мы будем говорить, что q индуцирована бинвариантной метрикой $\mathcal{B}$ или $\text{ad}(G)$ -инвариантным скалярным произведением B .

Если группа G компактна и полупроста, то всегда имеется $\text{ad}(G)$ -инвариантное положительно-определённое скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, а именно отрицательная форма Киллинга $B(X, Y) = -\text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$.

* * *

Напомним стандартные конструкции некоторых римановых симметрических пространств. Пусть G — компактная связная группа Ли, а G^* — диагональ прямого произведения $G \times G$. Факторпространство $(G \times G)/G^*$ диффеоморфно G , причём диффеоморфизм осуществляется в одну сторону отображением $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^{-1}$, а в другую — отображением $y \mapsto (y, e)$. Соответствующее действие $G \times G$ на G задаётся формулой $(x_1, x_2)y = x_1 y x_2^{-1}$, группа изотропии в начале есть G^* . Далее, пусть $\sigma: G \times G \rightarrow G \times G$ — инволютивный автоморфизм, задаваемый равенством $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Неподвижные точки автоморфизма σ суть как раз элементы из G^* , и, значит, σ индуцирует преобразование $s: G \rightarrow G$. Очевидно, $s(y) = y^{-1}$ для $y \in G$.

Теперь возьмём на G бинвариантную риманову метрику Φ ; такая метрика всегда существует. Очевидно, Φ инвариантна относительно действия $G \times G$ на G . Кроме того, Φ сохраняется в единице при отображении s , потому что $s_{*e}(X) = -X$ для всех $X \in \mathfrak{g}_e$. В соответствии с предложением 0.19, (G, Φ) — риманово симметрическое пространство.

Далее, рассмотрим однородное пространство $G^{k+1}/\Delta G^{k+1}$, где G^{k+1} — прямое произведение G на себя $k+1$ раз, а ΔG^{k+1} — диагональ в G^{k+1} (6); $G^{k+1}/\Delta G^{k+1}$ диффеоморфно G^k благодаря отображению

$$\pi: (x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto (x_1 x_{k+1}^{-1}, \dots, x_k x_{k+1}^{-1}), \quad (5)$$

и соответствующее действие G^{k+1} на G^k задаётся формулой

$$(x_1, \dots, x_{k+1})(y_1, \dots, y_k) = (x_1 y_1 x_{k+1}^{-1}, \dots, x_k y_k x_{k+1}^{-1}).$$

Каждый касательный вектор в начале G^k представляется единственным выражением $(X_1, \dots, X_k)$, где $(X_1, \dots, X_k) \in G_e$.

Рассмотрим отображение $\sigma: G^{k+1} \longrightarrow G^{k+1}$, определяемое формулой

$$\sigma(x_1, \dots, x_{k+1}) = (x_{k+1}, x_1, \dots, x_k). \quad (6)$$

Ясно, что σ — автоморфизм, причём $\sigma^{k+1} = \text{id}$ и $(G^{k+1})^\sigma = \Delta G^{k+1}$. Таким образом, выполнены условия (i), (ii) предложения 0.19 (если заменить k, G, H, M на $k+1, G^{k+1}, \Delta G^{k+1}$ и G^k соответственно). Преобразование $s: G^k \longrightarrow G^k$, определяемое равенством $\pi \circ \sigma = s \circ \pi$, может быть явно описано так:

$$s(y_1, \dots, y_k) \longmapsto (y_k^{-1}, y_1 y_k^{-1}, \dots, y_{k-1} y_k^{-1}). \quad (7)$$

Начало $0 \in G^k$ является изолированной неподвижной точкой преобразования s .

Пусть Φ — бинвариантная риманова метрика на G (такая метрика существует, потому что G компактна). Тогда прямая сумма $\Phi^{k+1} = \Phi + \dots + \Phi$ ($k+1$ раз) есть бинвариантная риманова метрика на G^{k+1} . Она индуцирует G^{k+1} -инвариантную риманову метрику на G^k , которую мы будем обозначать $\Phi^{[k]}$.

Рассмотрим скалярное произведение $\Phi_e^{[k]}$ в единице группы G^{k+1} . Оно инвариантно относительно автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}^{k+1}$

$$\sigma_{*e}: (X_1, \dots, X_{k+1}) \longmapsto (X_{k+1}, X_1, \dots, X_k)$$

(см. формулу (6)), и подалгебра $\Delta \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$ также σ_* -инвариантна. Отсюда следует, что подпространство $\mathfrak{m}$ в ортогональном разложении $\mathfrak{g}^{k+1} = \Delta \mathfrak{g}^{k+1} + \mathfrak{m}$ является σ_* -инвариантным. Если отождествить $\mathfrak{m}$ с касательным пространством $(G^k)_0$ при помощи π_* , то видно, что касательное отображение $s_{*0}: (G^k)_0 \longrightarrow (G^k)_0$ сохраняет метрику $\Phi^{[k]}$ в начале $0 \in G^k$. Согласно предложению 0.19, $(G^k, \Phi^{[k]})$ есть $(k+1)$ -симметрическое риманово пространство; симметрия порядка $k+1$ в начале задаётся отображением (7).

Найдем теперь точную формулу для $\Phi^{[k]}$ в начале $0 \in G^k$. Прежде всего, подалгебра Ли $\Delta \mathfrak{g}^{k+1}$ состоит из векторов вида $(X, \dots, X)$, $X \in \mathfrak{g}$, и её ортогональное дополнение $\mathfrak{m}$ образовано всеми $(k+1)$ -наборами $(X_1, \dots, X_{k+1}) \in \mathfrak{g}^{k+1}$, такими что $X_1 + \dots + X_{k+1} = 0$.

Отождествим касательное пространство $(G^k)_0$ с алгеброй $\text{Ли } \mathfrak{g}^k$. Тогда проекция (5) имеет касательное отображение $\pi_{*e} : \mathfrak{g}^{k+1} \rightarrow \mathfrak{g}^k$, задаваемое формулой

$$\pi_{*e}(X_1, \dots, X_{k+1}) = (X_1 - X_{k+1}, \dots, X_k - X_{k+1}). \quad (8)$$

Пусть ρ обозначает (единственный) линейный изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}^k$ на $\mathfrak{m}$, согласованный с π_{*e} . Легко видеть, что для любых $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$

$$\rho(X_1, \dots, X_k) = (X_1 - \frac{1}{k+1} Y, \dots, X_k - \frac{1}{k+1} Y, -\frac{1}{k+1} Y), \quad (9)$$

где $Y = X_1 + \dots + X_k$.

Далее, для индуцированной метрики $\Phi^{[k]}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi_0^{[k]}((X_1, \dots, X_k), (X_1, \dots, X_k)) \\ = \Phi_e^{k+1}((X_1 - \frac{1}{k+1} Y, \dots, X_k - \frac{1}{k+1} Y, -\frac{1}{k+1} Y), \\ (X_1 - \frac{1}{k+1} Y, \dots, X_k - \frac{1}{k+1} Y, -\frac{1}{k+1} Y)) = \sum_{i=1}^k \Phi(X_i - \frac{1}{k+1} Y, X_i - \frac{1}{k+1} Y) \\ + \frac{1}{(k+1)^2} \Phi(Y, Y) = \sum_{i=1}^k \Phi(X_i, X_i) - \frac{1}{k+1} \Phi(X_1 + \dots + X_k, X_1 + \dots + X_k) \\ = \frac{1}{k+1} (k \sum_{i=1}^k \Phi(X_i, X_i) - 2 \sum_{i < j} \Phi(X_i, X_j)) \\ = \frac{1}{k+1} [\sum_{i=1}^k \Phi(X_i, X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \Phi(X_i - X_j, X_i - X_j)]. \end{aligned}$$

Эта метрика совпадает, с точностью до постоянного множителя, с метрикой, изученной Леджером и Обатой в [LO]. Следуя [LO], мы докажем сейчас, что $(G^k, \Phi^{[k]})$ не является, вообще говоря, локально-симметрическим.

Если X — векторное поле на G , то через $X^{(i)}$ будем обозначать векторное поле на G^k , такое что для каждого $\tilde{x} \in G^k$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k)$, мы имеем

$$X_{\tilde{x}}^{(i)} = (0_{x_1}, \dots, 0_{x_{i-1}}, X_{x_i}, 0_{x_{i+1}}, \dots, 0_{x_k}).$$

Пусть $\{X_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, r$, — ортонормальный относительно Φ базис левинвариантных векторных полей на G . Тогда $\{X_\alpha^{(i)}\}$, $\alpha = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, k$, — базис модуля $\mathcal{X}(G^k)$ над $\mathcal{F}(G^k)$.

и векторные поля $X_\alpha^{(i)}$ инвариантны относительно действия подгруппы $G^{k*} \subset G^{k+1}$, образованной элементами вида $(x_1, \dots, x_k, e)$. Следовательно, все функции $\Phi^{[k]}(X_\alpha^{(i)}, X_\beta^{(j)})$ постоянны. Более точно, для левоинвариантных векторных полей X, Y на G мы имеем

$$\begin{aligned}\Phi^{[k]}(X^{(i)}, Y^{(j)}) &= -\frac{1}{k+1} \Phi(X_e, Y_e), \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, k, \\ \Phi^{[k]}(X^{(i)}, Y^{(i)}) &= (k/k+1) \Phi(X_e, Y_e), \quad i = 1, \dots, k.\end{aligned}\tag{10}$$

Пусть ∇ обозначает риманову связность, а R — поле тензора кривизны, ассоциированные с $\Phi^{[k]}$. Из вышеприведённых замечаний следует, что связность ∇ полностью определяется формулой

$$\begin{aligned}\Phi^{[k]}(\nabla_{X_\alpha^{(i)}} X_\beta^{(j)}, X_\gamma^{(l)}) &= \frac{1}{2} \{ \Phi^{[k]}([X_\alpha^{(i)}, X_\beta^{(j)}], X_\gamma^{(l)}) \\ &+ \Phi^{[k]}([X_\gamma^{(l)}, X_\alpha^{(i)}], X_\beta^{(j)}) + \Phi^{[k]}([X_\gamma^{(l)}, X_\beta^{(j)}], X_\alpha^{(i)}) \}.\end{aligned}\tag{11}$$

Если X и Y — левоинвариантные векторные поля на G , то, как легко проверить,

$$\begin{aligned}\nabla_{X^{(i)}} Y^{(j)} &= \frac{1}{2(k+1)} ([X, Y]^{(j)} - [X, Y]^{(i)}), \quad i \neq j, \\ \nabla_{X^{(i)}} Y^{(i)} &= \frac{1}{2} [X, Y]^{(i)}.\end{aligned}\tag{12}$$

Прямое вычисление даёт для $i \neq j$

$$(\nabla_{X^{(i)}} R)(X^{(i)}, X^{(j)})Y^{(j)} = \frac{1}{8(k+1)^3} [(2-k^2)((\text{ad } X)^3 Y)^{(i)} + k((\text{ad } X)^3 Y)^{(j)}].$$

Итак, для $k > 1$, $r > 1$ соотношение $\nabla R = 0$ влечёт за собой тот факт, что алгебра Ли группы G нильпотентна и, значит, абелева, поскольку G компактна. Предполагая группу G неабелевой, мы получаем $\nabla R \neq 0$. Суммируем полученное:

Теорема 0.20. Если G — связная компактная неабелева группа Ли, Φ — бинвариантная метрика на G и k — целое > 2 , то риманово однородное пространство $(G^k / \nabla G^k, \Phi^{[k-1]})$ является k -симметрическим, но не симметрическим.

Теперь докажем более сильный результат, а именно существование пространств порядка k . Для этого мы используем рассмотренный выше класс римановых пространств.

Пусть G/H — риманово однородное пространство с метрикой g , причём группа H компактна. Пусть $\tau: G \rightarrow I(G/H, g)$ — представление группы G изометриями. Тогда, как хорошо известно, $\tau(G)$ — замкнутая подгруппа Ли группы изометрий $I(G/H, g)$ и, значит, алгебра Ли $\tau(\mathfrak{g})$ группы $\tau(G)$ — подалгебра в $\mathfrak{i}(G/H, g)$ (см., например, $[X\eta]'$). В частности, в случае однородного многообразия $(G^{k+1}/\Delta G^{k+1}, \Phi^{[k]})$ алгебра Ли $\tau(\mathfrak{g}^{k+1})$ изоморфна факторалгебре $\mathfrak{g}^{k+1}/\Delta \mathfrak{z}^{k+1}$, где $\mathfrak{z}$ — центр в $\mathfrak{g}$.

Предложение 0.21. Рассмотрим однородное риманово многообразие $(G^{k+1}/\Delta G^{k+1}, \Phi^{[k]}) = (G^k, \Phi^{[k]})$, где

- а) группа G компактна и проста,
- б) форма Φ определена как умноженная на -1 киллингова форма алгебры $\mathfrak{g}$.

Предположим, что $\tau(G^{k+1})$ — компонента единицы полной группы изометрий $I(G^k, \Phi^{[k]})$. Тогда $(G^k, \Phi^{[k]})$ не является ℓ -симметрическим ни для какого $\ell < k+1$.

Доказательство. В соответствии с вышеизложенными замечаниями $\mathfrak{g}^{k+1}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{i}(G^k, \Phi^{[k]})$ и G^{k+1} локально-изоморфна группе $I(G^k, \Phi^{[k]})$.

Пусть r — изометрия многообразия $(G^k, \Phi^{[k]})$ с изолированной неподвижной точкой $o = (e, \dots, e)$, такая что $r^\ell = id$. Определим автоморфизм ρ группы $I(G^k, \Phi^{[k]})$ формулой $\rho(g) = r \circ g \circ r^{-1}$. Тогда ρ индуцирует автоморфизм $d\rho$ алгебры Ли $\mathfrak{g}^{k+1}$. отождествляя $\mathfrak{g}^{k+1}$ с $(G^{k+1})_e$, получаем

$$\pi_{*e} \circ d\rho = r_{*o} \circ \pi_{*e} \quad \text{на } (G^{k+1})_e. \quad (13)$$

Отсюда и из (8) вытекает, что

$$d\rho(\Delta \mathfrak{g}^{k+1}) \subset \Delta \mathfrak{g}^{k+1}. \quad (14)$$

$\mathfrak{g}^{k+1}$ есть прямая сумма простых подалгебр $\mathfrak{g}^{*(i)}$, $i=1, \dots, k+1$, каждая из которых канонически изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$. Автоморфизм $d\rho$ индуцирует перестановку ν индексов $1, \dots, k+1$, такую что $d\rho(\mathfrak{g}^{*\nu(i)}) = \mathfrak{g}^{*(i)}$, $i=1, \dots, k+1$. Обозначим через φ_i сужение автоморфизма $d\rho$ на $\mathfrak{g}^{*\nu(i)}$. Тогда можно написать $d\rho(X_1, \dots, X_{k+1}) = (\varphi_1(X_{\nu(1)}), \dots, \varphi_{k+1}(X_{\nu(k+1)}))$, где $X_i \in \mathfrak{g}$ для $i=1, \dots, k+1$. В частности, $d\rho(X, \dots, X) = (\varphi_1(X), \dots, \varphi_{k+1}(X))$.

В силу (14) мы имеем $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{k+1}$ после канонического отождествления $\mathfrak{g}^{*(1)} = \dots = \mathfrak{g}^{*(k+1)} = \mathfrak{g}$. Мы получаем единственный автоморфизм $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, такой что

$$d\rho(X_1, \dots, X_{k+1}) = (\varphi(X_{\nu(1)}), \dots, \varphi(X_{\nu(k+1)})). \quad (15)$$

Теперь используем следующий результат Уинтера [Wi]:

Лемма 0.22. Всякий автоморфизм A неразрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ оставляет неподвижным некоторый элемент X , для которого эндоморфизм $\text{ad } X$ не нильпотентен.

Пусть $X \neq 0$ — неподвижный вектор автоморфизма $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Предположим, что $l < k+1$. Тогда перестановка ν содержит некоторый цикл $(i_1, \dots, i_m)$ длины $m < k+1$. Рассмотрим вектор $Z = (X_1, \dots, X_{k+1}) \in \mathfrak{g}^{k+1}$, такой что $X_i = X$ для $i = i_1, \dots, i_m$ и $X_i = -X$ для остальных i . Ясно, что $d\rho(Z) = Z$, и в силу (13) мы получаем, что $\pi_{*e}(Z)$ — неподвижный вектор отображения r_{*0} . Далее, Z не принадлежит подалгебре $\Delta \mathfrak{g}^{k+1}$, откуда $\pi_{*e}(Z) \neq 0$, что приводит к противоречию. $\square$

Предложение 0.23. Для $G = SO(3)$ и $\Phi(X, Y) = (-\frac{1}{2})\text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$ последнее условие предложения 0.21 удовлетворяется для любого k .

Доказательство. Ниже элементы алгебры $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}^k$) рассматриваются как левоинвариантные векторные поля на группе G (соотв. G^k). Прежде всего, в алгебре $\mathfrak{g}$ имеется базис $\{X_1, X_2, X_3\}$, такой что $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = X_2$. Имеем $\Phi(X_\alpha, X_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Векторы $\{X_\alpha^{(i)}\}$, $\alpha = 1, 2, 3$; $i = 1, \dots, k$, образуют базис алгебры $\mathfrak{g}^k$. Используя формулы (12) и умножение в алгебре $\mathfrak{g}$, легко получить следующие свойства тензора кривизны R метрики $\Phi^{[k]}$:

$$R(X_\alpha^{(i)}, X_\beta^{(j)})X_\gamma^{(\ell)} = 0 \text{ для } \alpha \neq \beta \neq \gamma \text{ или } \alpha = \beta = \gamma,$$

$$R(X_\alpha^{(i)}, X_\beta^{(j)})X_\alpha^{(\ell)} \text{ и } R(X_\alpha^{(i)}, X_\alpha^{(j)})X_\beta^{(\ell)} \text{ принадлежат} \quad (16) \\ \text{подпространству, порождённому векторами } X_\beta^{(i)}, X_\beta^{(j)}, X_\beta^{(\ell)}.$$

Пусть H_0 — компонента единицы группы изотропии для $I(G^k, \Phi^{[k]})$ в начале 0 . Обозначим через $\mathfrak{h}_0$ соответствующую алгебру Ли; $\mathfrak{h}$ обладает точным представлением алгебры изотропии эндоморфизмами пространства (G^k) . Ясно, что, для того чтобы $A \in \mathfrak{h}_0$, необходимо выполнение условия $A(\Phi^{[k]}) = A(R) = 0$ в начале, где A действует как дифференцирование тензорной алгебры группы

$(G^k)_0$. Далее все вычисления будут проводиться в касательном пространстве $(G^k)_0$. Для удобства будем работать с гомотетичной метрикой $\hat{\Phi}^{[k]} = (k+1)\Phi^{[k]}$ вместо метрики $\Phi^{[k]}$.

Пусть $A \in \mathfrak{h}_0$. Положим

$$A X_{\alpha}^{(i)} = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^k a_{(j)\alpha}^{(i)\beta} X^{(j)}, \quad i=1, \dots, k; \alpha=1, 2, 3. \quad (17)$$

Мы видим, что

$$\hat{\Phi}^{[k]}(X^{(i)}, X^{(j)}) = \begin{cases} -\delta_{\alpha\beta} & \text{для } i \neq j, \\ k\delta_{\alpha\beta} & \text{для } i = j. \end{cases}$$

Соотношение $(A \hat{\Phi}^{[k]})(X_{\alpha}^{(i)}, X_{\beta}^{(j)}) = 0$ влечёт

$$k \left(a_{(i)\alpha}^{(i)\beta} + a_{(j)\beta}^{(j)\alpha} - \sum_{\ell \neq i} a_{(\ell)\alpha}^{(i)\beta} - \sum_{\ell \neq j} a_{(\ell)\beta}^{(j)\alpha} \right) = 0. \quad (18)$$

Легко вычислить, что

$$R(X_{\alpha}^{(i)}, X_{\beta}^{(i)}) X_{\alpha}^{(i)} = -(1/4) X_{\beta}^{(i)} \quad \text{для } \alpha \neq \beta.$$

Рассмотрим соотношение $(AR)(X_{\alpha}^{(i)}, X_{\alpha}^{(i)}) X_{\beta}^{(i)} = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} -(1/4) A X_{\beta}^{(i)} &= R(A X_{\alpha}^{(i)}, X_{\beta}^{(i)}) X_{\alpha}^{(i)} \\ &+ R(X_{\alpha}^{(i)}, A X_{\beta}^{(i)}) X_{\alpha}^{(i)} + R(X_{\alpha}^{(i)}, X_{\beta}^{(i)}) A X_{\alpha}^{(i)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим (17) в (19) и рассмотрим вектор $X_{\gamma}^{(j)}$ с $\gamma \neq \alpha, \beta$ и $j \neq i$. Этот вектор входит в левую часть с коэффициентом $-(1/4) a_{(j)\beta}^{(i)\gamma}$. Согласно (16) имеется только один член в правой части, в выражение для которого может входить $X_{\gamma}^{(j)}$, а именно $R(X_{\alpha}^{(i)}, a_{(j)\beta}^{(i)\gamma} X_{\gamma}^{(j)}) X_{\alpha}^{(i)}$. Далее,

$$R(X_{\alpha}^{(i)}, a_{(j)\beta}^{(i)\gamma} X_{\gamma}^{(j)}) X_{\alpha}^{(i)} = a_{(j)\beta}^{(i)\gamma} [(k+2) X_{\gamma}^{(i)} - X_{\gamma}^{(j)}] / [4(k+1)^2].$$

Сравнивая коэффициенты при $X_{\gamma}^{(j)}$, окончательно получаем $a_{(j)\beta}^{(i)\gamma} = 0$. Итак, мы доказали, что

$$a_{(j)\beta}^{(i)\alpha} = 0 \quad \text{для } i \neq j, \alpha \neq \beta. \quad (20)$$

Подставляя это в (18), получаем

$$a_{(i)\alpha}^{(i)\beta} + a_{(j)\beta}^{(j)\alpha} = 0 \quad \text{для } \alpha \neq \beta. \quad (21)$$

В частности, для $i = j$ имеем

$$a_{(i)\alpha}^{(i)\beta} + a_{(i)\beta}^{(i)\alpha} = 0, \quad (22)$$

откуда

$$a_{(1)\alpha}^{(1)\beta} = a_{(2)\alpha}^{(2)\beta} = \dots = a_{(k)\alpha}^{(k)\beta} \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta. \quad (23)$$

Теперь сравним коэффициенты при $X_{\beta}^{(j)}$, $j \neq i$, в соотношении (19). В левую часть этого соотношения $X_{\beta}^{(j)}$ входит с коэффициентом $-(1/4) a_{(j)\beta}^{(i)\beta}$. В правой же части $X_{\beta}^{(j)}$ может встретиться только в выражениях для членов

$$\begin{aligned} & R(a_{(j)\alpha}^{(i)\alpha} X_{\alpha}^{(j)}, X_{\beta}^{(i)}) X_{\alpha}^{(i)}, \\ & R(X_{\alpha}^{(i)}, a_{(j)\beta}^{(i)\beta} X_{\beta}^{(j)}) X_{\alpha}^{(i)}, \\ & R(X_{\alpha}^{(i)}, X_{\beta}^{(i)}) (a_{(j)\alpha}^{(i)\alpha} X_{\alpha}^{(j)}). \end{aligned}$$

После несложных выкладок получаем

$$(3k+2)a_{(j)\alpha}^{(i)\alpha} + (k^2-2k)a_{(j)\beta}^{(i)\beta} = 0, \quad i \neq j. \quad (24)$$

Записывая эти соотношения для $(\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ соответственно, получаем окончательно

$$a_{(j)\alpha}^{(i)\alpha} = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j, \alpha = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Полагая в (18) $i = j$ и $\alpha = \beta$, выводим из (25)

$$a_{(i)\alpha}^{(i)\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad i = 1, \dots, k. \quad (26)$$

Сводя воедино (20), (25) и затем (22), (23), (26), видим, что H_0 изоморфна $\mathfrak{so}(3)$ (3). Следовательно, H_0 локально-изоморфна $G = SO(3)$. С другой стороны, H_0 содержит образ $\tau(\Delta G^{k+1})$, который также локально-изоморфен группе G . Значит, $H_0 = \tau(\Delta G^{k+1})$, и компонента единицы группы $I(G^k, \Phi^{[k]})$ совпадает с $\tau(G^{k+1})$. $\square$

В результате мы приходим к следующей теореме:

Теорема 0.24. Для любого целого $k \geq 2$ существует компактное обобщённое симметрическое риманово пространство (M, g) порядка k , такое что компонента единицы группы всех изометрий полупроста.

В частности, для любого целого $k > 2$ существует k -симметр-

ическое риманово пространство, не являющееся l -симметрическим для $l = 2, \dots, k-1$.

Замечание. Было бы интересно выяснить, выполняется ли последнее условие предложения 0.21 автоматически для каждой компактной простой группы Ли. Как показал прямым вычислением М. Божек (неопубликовано); предложение 0.23 может быть распространено на случай $G = SO(n)$.

ОДИН ТРЕХМЕРНЫЙ ПРИМЕР

В предыдущих параграфах мы построили класс обобщенных симметрических римановых пространств порядка > 2 , каждое из которых компактно и обладает тем свойством, что его компонента единицы группы изометрии полупроста. Это свойство группы изометрии типично для обычных симметрических пространств. Действительно, если (M, g) — связное и односвязное риманово симметрическое пространство, то по теореме о разложении де Рама мы имеем $M = M_0 \times M'$, где M_0 — евклидово пространство, а M' — прямое произведение неприводимых симметрических пространств. Поэтому $I^*(M) = I^*(M_0) \times I^*(M')$, а группа $I^*(M')$ полупроста (см. [КН1]').

Для класса обобщенных симметрических римановых пространств такая ситуация уже не является единственно возможной. Здесь имеются также пространства с другой теоретико-групповой структурой. В качестве иллюстрации мы построим обобщенное симметрическое риманово пространство (M, g) , такое что

- а) (M, g) диффеоморфно $\mathbb{R}^3$, неприводимо и имеет порядок 4,
- б) группа $I^*(M)$ разрешима.

Рассмотрим группу Ли G всех матриц вида $\begin{pmatrix} e^{-c} & 0 & a \\ 0 & e^c & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (группу гиперболических движений плоскости $\mathbb{R}^2$). Группа G разрешима и диффеоморфна $\mathbb{R}^3$. Векторные поля

$$X = e^{-c} \frac{\partial}{\partial a}, \quad Y = e^c \frac{\partial}{\partial b}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial c}$$

левоинвариантны и образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Имеем $[X, Y] = 0$, $[X, Z] = X$, $[Y, Z] = -Y$. Определим инвариантную риманову метрику g на группе G формулами

$$g(X, X) = g(Y, Y) = 1, \quad g(Z, Z) = \lambda^2, \\ g(X, Y) = g(X, Z) = g(Y, Z) = 0, \quad \lambda > 0.$$

На нашем многообразии $\mathbb{R}^3(a, b, c)$ мы имеем в точности

$$ds^2 = e^{2c} da^2 + e^{-2c} db^2 + \lambda^2 dc^2, \quad \lambda > 0.$$

Автоморфизм $A: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, задаваемый равенствами $AX = -Y$,

$AY = X$, $AZ = -Z$, сохраняет метрику и имеет порядок 4. Со-

ответствующий автоморфизм $\mathcal{G}$ группы G задаётся формулами $a' = -b$,

$b' = a$, $c' = -c$. Очевидно, $\mathcal{G}$ есть изометрия пространства

$(\mathbb{R}^3(a, b, c), g)$; её порядок равен 4, и начало служит единственной неподвижной точкой автоморфизма $\mathcal{G}$. В соответствии с предложением 0.19 (где $\pi = id$, $\mathcal{G} = I$) пространство $(\mathbb{R}^3, g)$ является 4-симметрическим.

Для римановой связности ∇ мы легко выводим следующие формулы:

$$\nabla_X X = -\lambda^2 Z, \quad \nabla_X Y = 0, \quad \nabla_X Z = X$$

$$\nabla_Y X = 0, \quad \nabla_Y Y = \lambda^2 Z, \quad \nabla_Y Z = -Y \quad (27)$$

$$\nabla_Z X = \nabla_Z Y = \nabla_Z Z = 0.$$

Вычисляя тензор кривизны, немедленно получаем, что наше пространство неприводимо (алгебра Ли, порождённая преобразованиями кривизны, неприводима на каждом касательном пространстве). Далее, секционные кривизны в базисном двумерном направлении суть $K(X, Y) = \lambda^2$, $K(X, Z) = K(Y, Z) = -\lambda^2$ в каждой точке. Легко видеть, что $(X, Y)_p$, $p \in \mathbb{R}^3$, — единственная касательная 2-плоскость с кривизной λ^2 . Значит, семейство таких 2-плоскостей должно сохраняться при действии изометрии I , и, следовательно, $I_* Z = \varepsilon Z$, $I_* X = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$, $I_* Y = \varepsilon' (-X \sin \alpha + Y \cos \alpha)$, $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, где параметр α — вещественная функция на G . Каждая изометрия $I \in I(\mathbb{R}^3, g)$ есть также аффинное преобразование относительно связности ∇ , т.е. $\nabla_{I_* U} I_* V = I_* (\nabla_U V)$ для любых векторных полей U, V на G . Рассматривая $U = X$, $V = Z$ и $U = Y$, $V = Z$, получаем, в силу (27), что возможны только 8 случаев, а именно:

$$\left. \begin{aligned} I_* X &= \delta X, & I_* Y &= \delta' Y, & I_* Z &= Z \\ I_* X &= \delta Y, & I_* Y &= \delta' X, & I_* Z &= -Z \end{aligned} \right\} \delta, \delta' = \pm 1.$$

В частности, группа изометрии в начале конечна и состоит из 8 элементов. Отсюда мы заключаем, что

а) компонента единицы группы $I(\mathbb{R}^3, g)$ изоморфна группе G и тем самым разрешима;

б) в начальной точке не существует симметрий порядка 2 или 3; следовательно, $(\mathbb{R}^3, g)$ — обобщенное симметрическое пространство порядка 4.

Как мы увидим позже (гл. VI), построенными выше пространствами (при разных значениях λ , мы получаем не изометрические пространства) исчерпываются все односвязные обобщенные римановы пространства размерности 3, не являющиеся симметрическими. Этот пример важен также с точки зрения обобщений на высшие размерности: он представляет некоторое "типическое" обобщенное симметрическое риманово пространство разрешимого типа (см. добавление I).

РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕ РАМА

Приводимая ниже теорема обобщает результат, хорошо известный для римановых симметрических пространств.

Теорема 0.25. Пусть (M, g) — односвязное обобщенное симметрическое риманово пространство и $M = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_r$ — его разложение де Рама, где M_0 — евклидово пространство, а $M_1, \dots, M_r$ неприводимы. Тогда каждый сомножитель является обобщенным симметрическим римановым пространством. Далее, всякая регулярная s -структура порядка k на (M, g) определяет регулярную s -структуру порядка k_i на каждом M_i , где $k_i | k$ для $i = 0, 1, \dots, r$.

Доказательство. Выберем точку $p \in M$, и пусть $M_p = V_0 + V_1 + \dots + V_r$ — каноническое ортогональное разложение M_p на подпространства, инвариантные относительно линейной группы голономии $\Psi(p)$. Здесь $V_1, \dots, V_r$ неприводимы относительно группы $\Psi(p)$ (см. [КН1]', с. 178). Пусть $\{S_x\}$ — регулярная s -структура порядка $k \geq 2$ на (M, g) . Ортогональное преобразование $S_p = (S_p)_* p$ на M_p таково, что $(S_p)^k = I_p$ и отображение $S_p - I_p$ неособое. Кроме того, S_p коммутирует с группой голономии $\Psi(p)$ в том смысле, что $S_p \Psi(p) S_p^{-1} = \Psi(p)$. Поэтому S_p сохраняет каноническое разложение M_p (с точностью до порядка сомножителей) и $S_p(V_0) = V_0$. Далее, для любого $x \in M_p$

$$X + S_p(X) + \dots + (S_p)^{k-1}(X) = 0. \quad (28)$$

Действительно, имеет место равенство $(S_p - I_p)(I_p + S_p + \dots + S_p^{k-1}) = 0$, где $S_p - I_p$ — неособое преобразование.

Рассмотрим (это не уменьшает общности) подпространство V_1 . Подпространства $S_p(V_1), S_p^2(V_1), \dots, S_p^{k-1}(V_1)$ суть некоторые среди подпространств V_i . Пусть ℓ — наименьшее положительное целое число, такое что $S_p^\ell(V_1) = V_1$ ($\ell \leq k$). Неприводимые подпространства $V_1, S_p(V_1), \dots, S_p^{\ell-1}(V_1)$ все различны и взаимно ортогональны. Значит, невозможно, чтобы $k = \ell$; иначе соотношение (28) давало бы ортогональное разложение нулевого вектора для любого $X \in V_1$ и, следовательно, мы имели бы $V_1 = (0)$, что не так. Следовательно, $k = m\ell$, где $m \geq 2$. Из (28) вытекает, что $X + S_p^\ell(X) + \dots + S_p^{\ell(m-1)}(X) = 0$ для любого $X \in V_1$. Предполагая $S_p^\ell(X) = X$ для некоторого $X \in V_1$, $X \neq 0$, мы получаем $mX = 0$ — противоречие. Итак, S_p^ℓ не имеет в V_1 неподвижных векторов.

Пусть M'_1 — вполне геодезическое подмногообразие многообразия M , касательное к V_1 в точке p (M'_1 изометрично множителю M_1 в разложении де Рама). Тогда изометрия s_p^ℓ переводит в себя многообразие M'_1 , и $s_{p|M'_1}^\ell$ есть симметрия многообразия M'_1 в точке p .

Далее, M связно и $G = C^\ell(\{s_x\})$ — транзитивная группа изометрий на M ; значит, компонента единицы G° также транзитивна на M . Вспомним, что компоненты в разложении де Рама суть максимальные интегральные многообразия распределений $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$ на M , получаемых из $V_0, V_1, \dots, V_r$ параллельными переносами. Очевидно, связная группа изометрий G° сохраняет распределения $\mathcal{V}_i$, $i = 0, 1, \dots, r$. Отсюда вытекает, что если $x \in M'_1$ и $g \in G^\circ$ таковы, что $g(p) = x$, то M'_1 инвариантно относительно g . Следовательно, максимальная замкнутая подгруппа $G_1 < G$, относительно которой M'_1 инвариантно, транзитивна на M'_1 . Кроме того, $s_p^\ell \in G_1$.

Для каждого $x \in M'_1$ мы можем написать $s_x = g \circ s_p \circ g^{-1}$, где $g \in G_1$ — такой элемент, что $g(p) = x$ (см. доказательство леммы 0.14). Отсюда $s_x^\ell = g \circ s_p^\ell \circ g^{-1} \in G_1$, и s_x^ℓ индуцирует симметрию M'_1 в точке x . Семейство $\{s_x^\ell|_{M'_1} : x \in M'_1\}$ есть регулярная s -структура порядка m на M'_1 , что и завершает доказательство. $\square$

Замечание 0.26. Для обычных римановых симметрических пространств имеет место более общий результат. Пусть M_1 и M_2 — римановы многообразия. Если их риманово прямое произведение $M_1 \times M_2$ является римановым симметрическим, тогда и сами они таковы же. Нам неизвестно, остаётся ли этот факт верным для обобщённых симметрических пространств (т.е. без предположения об односвязности M_i).

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ S -СТРУКТУРЫ

Определение 0.27. Говорят, что S -структура $\{s_x\}$ на римановом многообразии (M, g) параллельна, если тензорное поле S параллельно относительно римановой связности: $\nabla S = 0$.

Предложение 0.28. Каждая параллельная риманова S -структура регулярна.

Доказательство. Предположим, что $\{s_x\}$ — параллельная S -структура на (M, g) . Пусть $p \in M$ — фиксированная точка. Положим $S'_p = s_{p*}(S)$. Так как $\nabla S = 0$ и s_p — отображение, сохраняющее связность, то $\nabla S' = 0$. Далее, $S'_p = (s_p)_{*p}(S_p) = S_p$; в силу единственности параллельного переноса для S мы имеем $S' = S$. Итак, для всех точек $p \in M$ выполняется равенство $(s_p)_*(S) = S$, и, значит, $\{s_x\}$ регулярна по предложению 0.9. $\square$

Предложение 0.29. Если риманово многообразие (M, g) допускает параллельную S -структуру, то оно локально-симметрично.

Доказательство. Пусть $\{s_x\}$ — параллельная S -структура на (M, g) , $\nabla S = 0$. Пусть $X, Y, Z \in M_p$ — касательные векторы, а $\omega \in M_p^*$ — ковектор в точке $p \in M$. Параллельными переносами вдоль каждой геодезической, проходящей через точку p , можно продолжить X, Y, Z и ω до локальных полей $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{\omega}$ с обращающейся в нуль ковариантной производной в точке p . Так как S параллельно, то локальные поля $S\tilde{X}, S\tilde{Y}, S\tilde{Z}, S^{*-1}\tilde{\omega}$ также имеют обращающуюся в нуль ковариантную производную в точке p . (Здесь S^* обозначает транспонированное к S отображение.) Далее, поскольку тензор кривизны R инвариантен относительно аффинных преобразований s_x , $x \in M$, мы имеем

$$R(\omega, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = R(S^{*-1}\tilde{\omega}, S\tilde{X}, S\tilde{Y}, S\tilde{Z}), \quad (29)$$

$$(\nabla R)(\omega, X, Y, Z; U) = (\nabla R)(S^{*-1}\omega, SX, SY, SZ; SU). \quad (30)$$

Дифференцируя ковариантно (29) в направлении SU в точке p и используя (30), получаем

$$\begin{aligned} (\nabla R)(\omega, X, Y, Z; SU) \\ = (\nabla R)(S^{*-1}\omega, SX, SY, SZ; SU) = (\nabla R)(\omega, X, Y, Z; U). \end{aligned}$$

Итак, $(\nabla R)_p(\omega, X, Y, Z; (I - S)U) = 0$ для всех $\omega \in M_p^*$, $X, Y, Z, U \in M_p$, а так как $(I - S)_p$ — неособое преобразо-

вание, то $(\nabla R)_p = 0$. Это верно для всех $p \in M$, и, следовательно, $\nabla R = 0$. $\square$

Вследствие предложения 0.29 все регулярные s -структуры, построенные в наших примерах обобщённых симметрических пространств высшего порядка, не параллельны. С другой стороны, в обоих примерах пункта 0.10 регулярные s -структуры параллельны. В частности, геодезические симметрии риманова симметрического пространства образуют параллельную s -структуру.

Рассмотрим теперь второй пример – семейство вращений евклидовой плоскости. Мы сможем обобщить этот пример на высшие размерности следующим приёмом. Пусть E^n – евклидово пространство и s – ортогональное преобразование в начале, не имеющее неподвижных ненулевых векторов. Для каждого $x \in E^n$ обозначим через t_x сдвиг, такой что $t_x(0) = x$. Тогда семейство $\{s_x = t_x \circ s \circ t_x^{-1}, x \in M\}$ есть параллельная регулярная s -структура. Очевидно, что такими семействами исчерпываются все параллельные s -структуры в E^n . Представляет интерес вопрос, существуют ли в евклидовом пространстве непараллельные регулярные s -структуры. В замечании 4 мы показываем, что для E^2 , E^3 и E^4 ответ отрицателен.

Неожиданным образом для E^5 ответ положителен. отождествим E^5 с пространством $\mathbb{C}^2(z, w) \times \mathbb{R}^1(t)$ и определим симметрию σ_0 в точке $0 = (0, \dots, 0)$ соотношениями $z' = iw$, $w' = iz$, $t' = -t$. Далее, рассмотрим следующую одностранзитивную группу изометрий на E^5 :

$$G: z' = e^{it_0} z + z_0, \quad w' = e^{-it_0} w + w_0, \quad t' = t + t_0.$$

Многообразием группы G здесь будет $\mathbb{C}^2(z_0, w_0) \times \mathbb{R}^1(t_0)$. Легко видеть, что семейство $\{g \circ \sigma_0 \circ g^{-1}; g \in G\}$ – регулярная s -структура порядка 4 на $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$. Прямым вычислением можно показать, что эта s -структура не параллельна (подробности см. в добавлении 4).

КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Напомним, что римановы локально-симметрические пространства характеризуются соотношением $\nabla R = 0$. Что касается обобщённых симметрических пространств, то вряд ли можно найти для них простую характеристику в терминах риманова тензора кривизны. (Единственным исключением является 3-симметрический случай, хотя и здесь необходимы некоторые ограничения.) Однако если нам задана конкрет-

ная регулярная s -структура $\{s_x\}$ на (M, g) , то можно построить так называемую каноническую связность этой s -структуры. Она-то и обладает искомыми простыми характеристическими свойствами. В этом параграфе естественно работать с локальной s -структурой. Основная формула (31) ниже принадлежит Грейму и Леджеру [GL 2].

Определение 0.30. Локальная регулярная s -структура на римановом многообразии (M, g) — это семейство $\{s_x: x \in M\}$ локальных изометрий многообразия (M, g) , таких что

а) для каждой локальной изометрии s_x точка x есть изолированная неподвижная точка (в таком случае s_x называют локальной симметрией);

б) касательное тензорное поле S , определяемое формулой $S_x = (s_x)_* x$, гладко и инвариантно относительно всех локальных симметрий s_x .

Предложение 0.31. Пусть $\{s_x\}$ — локальная регулярная s -структура на (M, g) и $\tilde{\nabla}$ — связность на M , определяемая соотношениями

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - D_X Y, \quad D_X Y = (\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y) \quad (31)$$

для всех векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, где ∇ — риманова связность, а D — тензорное поле типа $(1, 2)$. Тогда связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно всех s_x и удовлетворяет соотношению $\tilde{\nabla} S = 0$.

Доказательство. Так как s_x — локальные изометрии, они сохраняют риманову связность ∇ , а значит, вследствие регулярности, они сохраняют S . Отсюда легко следует инвариантность ∇S , D и $\tilde{\nabla}$. Тождество $(\tilde{\nabla}_X S)Y = 0$ получается прямым вычислением с использованием соотношений $S(D_X Y) = D_{s_x} s_x Y$, $D_{(I-S)^{-1}X} s_x Y = (\nabla_X S)(Y)$. $\square$

Предложение 0.32. Пусть ∇' — произвольная связность на многообразии M , инвариантная относительно всех s_x , и $\tilde{\nabla}$ — связность (31). Тогда

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla'_X Y - (\nabla'_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y).$$

Доказательство. Пусть $E = \nabla' - \tilde{\nabla}$ — соответствующий тензор разности; для $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ мы пишем $E_X Y = \nabla'_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$. Поскольку обе связности ∇' и $\tilde{\nabla}$ инвариантны относительно s_x , $x \in M$, то E инвариантна относительно S : $S(E_X Y) = E_{s_x} s_x Y$ для произ-

вольных X, Y . Далее, легко проверяется, что

$$\begin{aligned} (E_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y) &= E_{(I-S)^{-1}X} Y - S(E_{(I-S)^{-1}X} S^{-1}Y) \\ &= E_{(I-S)^{-1}X} Y - E_{S(I-S)^{-1}X} Y = E_X Y. \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{\nabla} S = 0$, мы получаем

$$E_X Y = (E_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y) = (\nabla'_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Из предыдущих предложений вытекает

Теорема 0.33. Пусть (M, g) — риманово многообразие и $\{S_x\}$ — локальная регулярная риманова s -структура на M . Существует единственная связность $\tilde{\nabla}$ на M , такая что

- (i) $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно всех S_x ;
- (ii) $\tilde{\nabla} S = 0$.

В терминах римановой связности $\tilde{\nabla}$ задаётся формулой (31).

Очевидно, связность $\tilde{\nabla}$ полностью определяется локальной s -структурой $\{S_x\}$, и риманова связность играет здесь лишь вспомогательную роль. Поэтому мы можем принять следующее определение.

Определение 0.34. Связность $\tilde{\nabla}$ из теоремы 0.33 называется канонической связностью локальной регулярной s -структуры $\{S_x\}$.

Предложение 0.35. Пусть $\{S_x\}$ — локальная регулярная s -структура на многообразии (M, g) . Тогда каждое тензорное поле, инвариантное при действии S_x , параллельно относительно $\tilde{\nabla}$.

Доказательство. Так как $\tilde{\nabla} S = 0$ и S_x — локальные аффинные преобразования по отношению к $\tilde{\nabla}$, то доказательство в сущности такое же, как и в предложении 0.29. Нужно только всюду заменить риманову связность ∇ канонической связностью $\tilde{\nabla}$. Подробности предоставляются читателю. $\square$

Как следствие мы получаем

Предложение 0.36. Пусть $\{S_x\}$ — локальная регулярная s -структура на многообразии (M, g) . Тогда относительно канонической связности мы имеем

$$\tilde{\nabla} g = \tilde{\nabla} R = \tilde{\nabla} S = 0, \quad \tilde{\nabla}(\nabla S) = \tilde{\nabla}(D) = 0, \quad \tilde{\nabla} \tilde{R} = \tilde{\nabla} \tilde{T} = 0.$$

Наконец, справедливо

Предложение 0.37. Пусть (M, g) – риманово многообразие, допускающее локальную регулярную s -структуру $\{s_x\}$. Тогда (M, g) допускает согласованную с ней аналитическую структуру и тензорное поле S аналитично.

Доказательство. Связность $\tilde{\nabla}$ обладает параллельной кривизной и параллельным кручением. Относительно атласа, состоящего из нормальных координатных систем, M есть аналитическое многообразие и связность является аналитической (см. теорему B6 из приложения B). Наше утверждение следует теперь из того факта, что $\tilde{\nabla}g = 0$, $\tilde{\nabla}S = 0$. $\square$

В глобальном случае имеет место

Предложение 0.38. Пусть $\{s_x\}$ – регулярная s -структура на (M, g) . Тогда каноническая связность $\tilde{\nabla}$ полна.

Доказательство. Пусть $p \in M$ – фиксированная точка. Существует $r > 0$, такое что для каждого единичного вектора $X \in M_p$ геодезическая $\widetilde{\exp} sX$ относительно $\tilde{\nabla}$ определена при $|s| \leq r$. Пусть $z_s = \widetilde{\exp}_s Z$, $0 \leq s \leq a$, – какая-либо геодезическая, выпущенная из p (Z – единичный вектор). Так как $\tilde{\nabla}g = 0$, то все касательные векторы z'_s вдоль z_s суть единичные векторы. Покажем, что z_s можно продолжить до геодезической, определённой при $0 \leq s \leq a + r$. Так как группа $\mathcal{C}(\{s_x\})$ транзитивна на M , то мы можем найти преобразование $\varphi \in \mathcal{C}(\{s_x\})$, отображающее p в z_a . Тогда φ^{-1} есть изометрия. Она отображает единичный вектор z'_a в единичный вектор X в точке p . Поскольку $\widetilde{\exp} sX$, $0 \leq s \leq r$, – геодезическая, проходящая через точку p , а φ – аффинное преобразование по отношению к $\tilde{\nabla}$, то $\varphi(\widetilde{\exp} sX)$ – геодезическая, проходящая через z_a . Положим $z_{a+s} = \varphi(\widetilde{\exp} sX)$ для $0 \leq s \leq r$. Тогда z_s , $0 \leq s \leq a + r$, есть геодезическая. Это завершает доказательство. $\square$

Как хорошо известно из классической теории, всякое риманово симметрическое пространство (M, g) можно превратить в редуктивное однородное пространство. Надо просто положить $M = G/G_0$, где G – компонента единицы группы $I(M)$, а G_0 – подгруппа изотропии. Далее, из предложений 0.35 и 0.38 видно, что каноническая связность регулярной s -структуры обладает свойствами, аналогичными свойствам канонической связности редуктивного однородного пространства (см. [KH2]). Поэтому следует ожидать, что риманово многообразие (M, g) с регулярной s -структурой $\{s_x\}$ может быть пре-

вращено в редуктивное однородное пространство таким образом, чтобы обе канонические связности совпадали.

В действительности, в общем случае имеется даже несколько таких "естественных" конструкций. Самая простая получится, если положить $M = G / G_0$, где $G = \mathcal{C}(\{s_x\})$, а G_0 — подгруппа изотропии. Тот факт, что однородное пространство G / G_0 редуктивно, а также совпадение обеих канонических связностей будут доказаны в гл. II.

Далее, в данном выше определении канонической связности (с помощью теоремы 0.33) и в последней конструкции редуктивного однородного пространства G / G_0 наши объекты по существу зависят лишь от регулярной s -структуры $\{s_x\}$, риманова же метрика играет чисто вспомогательную роль.

Цель глав II и III — избавиться от римановых метрик и провести все построения в более общей, абстрактной ситуации. (Эта абстрактная ситуация приводит к понятию "обобщённого аффинного симметрического пространства".) Необходимая для дальнейшего теория редуктивных однородных пространств будет развита в гл. I.

◆

Литература: [GL 2], [KH 2]', [K1], [K3], [K5], [K 6], [L0], [TL 2].

Глава I

Редуктивные пространства

По поводу стандартных понятий, используемых в этой главе, см. $[КН]'$ и $[Ше]'$.

РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть K — связная группа Ли и H — её замкнутая подгруппа. Рассмотрим однородное многообразие K/H . Ниже $\pi: K \rightarrow K/H$ всегда будет обозначать каноническую проекцию, а $0 = \pi(H)$ — начало в K/H .

Пусть $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп K и H соответственно. Предположим, что имеется подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{f}$, такое что $\mathfrak{f} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ (прямая сумма векторных пространств) и $\text{ad}(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ для каждого $h \in H$. Тогда говорят, что однородное пространство K/H редуктивно относительно разложения $\mathfrak{f} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. В этом случае, очевидно, имеет место включение $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

Предложение I.1. Пусть K/H редуктивно относительно разложения $\mathfrak{f} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. Тогда подпространство $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ есть идеал алгебры $\mathfrak{f}$ и соответствующая нормальная подгруппа $L \subset K$ действует транзитивно на K/H посредством левых сдвигов. Далее, L порождается множеством $\exp(\mathfrak{l})$, где $\exp: \mathfrak{f} \rightarrow K$ — экспоненциальное отображение в единице группы $e \in K$ (а алгебра $\mathfrak{f}$ естественным образом отождествляется с касательным пространством K_e).

Доказательство. Из соотношения $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ ясно, что $\mathfrak{l}$ есть идеал в алгебре $\mathfrak{f}$; значит, соответствующая связная подгруппа Ли $L \subset K$ нормальна. Отождествляя $\mathfrak{f}$ с K_e , легко видим, что $\pi_{*e}(\mathfrak{l}) = \pi_{*e}(\mathfrak{m}) = (K/H)_0$. Поэтому транзитивность подгруппы L следует из стандартных теорем о неявных функциях и того факта, что K/H связно.

Докажем второе утверждение. Пусть L' — подгруппа в L , поро-

жённая $\exp(\mathfrak{M})$. Положим $A = \{X \in \mathfrak{Y} : \exp tX \in L' \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — подпространство в $\mathfrak{Y}$, порождённое множеством A . Тогда $\mathfrak{M} \subset A \subset \mathfrak{A}$. Если $h \in L'$ и $X \in A$, то

$$\text{Ad}(h)(\exp tX) = \exp(t \cdot \text{ad}(h)X) \in L',$$

откуда $\text{ad}(h)X \in A$. Следовательно, $\text{ad}(h)(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$. В частности, для $Y \in A$, $X \in \mathfrak{A}$ имеем $e^{\text{ad} tY} X = \text{ad}(\exp tY) \cdot X \in \mathfrak{A}$ для каждого t и, значит, $[Y, X] \in \mathfrak{A}$. В силу линейности мы получаем $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] \subset \mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{A}$ есть подалгебра в $\mathfrak{Y}$. Далее, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{M} + [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{A} + [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] \subset \mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{Y}$. Тем самым A содержит базис $\{X_1, \dots, X_m\}$ алгебры $\mathfrak{Y}$ и $\exp t_1 X_1 \dots \exp t_m X_m \in L'$ для всех t_i . Это показывает, что L' целиком содержит некоторую окрестность единицы e в группе L и, следовательно, совпадает с L . $\square$

Предложение I.2. Пусть K/H редуктивно относительно разложения $\mathfrak{F} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. Если K действует на K/H эффективно, то линейное изотропное представление подгруппы H в касательном пространстве $(K/H)_0$ является точным.

Доказательство. Пусть элемент $h \in H$, $h \neq e$, индуцирует тождественное преобразование на $(K/H)_0$. Тогда $\text{ad}(h)$ индуцирует тождественное преобразование на $\mathfrak{m}$. (Мы пользуемся тем фактом, что $\pi_{*e} : \mathfrak{m} \rightarrow (K/H)_0$ есть изоморфизм.) Далее, автоморфизм $\text{Ad}(h) : K \rightarrow K$ тождественен на L . Действительно, для каждого $X \in \mathfrak{m}$ мы имеем

$$\text{Ad}(h)(\exp X) = \exp(\text{ad}(h)X) = \exp X$$

и, согласно I.1, $\text{Ad}(h)(g) = g$ для каждого $g \in L$. Далее, так как группа L транзитивна на K/H , то в каждом классе $\bar{x} \in K/H$ имеется элемент $l \in L$. Отсюда $h \cdot \bar{x} = h(lH) = \text{Ad}(h)(l)H = lH = \bar{x}$. Это означает, что h индуцирует тождественное преобразование на K/H , в противоречие с эффективностью группы K . $\square$

Предложение I.3. Пусть K действует эффективно на редуктивном однородном пространстве $M = K/H$ ($\dim M = n$). Тогда группа H изоморфна подгруппе G группы $GL(n, \mathbb{R})$ и расслоенное пространство $K(M, H, \pi)$ изоморфно подрасслоению $P(M, G)$ главного расслоения реперов $L(M, GL(n, \mathbb{R}))$ (т.е. G -структуре на M).

Доказательство. Согласно I.2, представление изотропии группы H в M_0 является точным. Следовательно, группа K действует свободно

на расслоении реперов $L(M)$ (слева); мы будем обозначать это действие точкой.

Пусть u_0 — фиксированный репер в точке o . Рассмотрим отображение $f: K \rightarrow L(M)$, задаваемое соответствием $g \mapsto g \cdot u_0$. Далее, пусть $\lambda: H \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ обозначает отображение, задаваемое соответствием $h \cdot u_0 = u_0 \lambda(h)$ для каждого $h \in H$. Ясно, что λ инъективно и $f(qh) = f(q)\lambda(h)$ для $q \in K, h \in H$. (Отображение λ есть не что иное, как представление изотропии группы H в M_0 , выраженное относительно фиксированной системы координат.) Следовательно, если мы положим $G = \lambda(H)$, то f определит изоморфизм расслоения $K(M, H)$ на подрасслоение $P(M, G) \subset L(M)$, что и требовалось. $\square$

КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Соглашение I.4. Пусть K — группа Ли, действующая на многообразии M слева. Мы определяем дифференцируемое отображение $(\cdot): T(K) \times M \rightarrow T(M)$ следующим образом: для $g \in K, X \in K_g$ и $p \in M$ полагаем

$$X \cdot p = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\exp_g tX \cdot p), \text{ где } \exp_g = L_g \circ \exp \circ (L_{g^{-1}})_* g.$$

Пусть опять $M = K/H$ — редуктивное однородное пространство относительно разложения $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ (нет необходимости предполагать, что K действует эффективно на M). Рассмотрим левоинвариантное распределение $\{\mathfrak{m}_g, g \in K\}$ на K , порождённое подпространством $\mathfrak{m}$; здесь $\mathfrak{m}_g \in K_g$ для всех $g \in K$. Из свойства $\text{ad}(h)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ следует, что $\mathfrak{m}_h = (L_h)_* \mathfrak{m}_e = (R_h)_* \mathfrak{m}_e$ для каждого $h \in H$. Обычно мы будем отождествлять $\mathfrak{m}$ с $\mathfrak{m}_e$.

Рассмотрим расслоение реперов $L(M)$ со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$, действующей справа, и проекцию $\tilde{\pi}: L(M) \rightarrow M$. Группа K действует на $L(M)$ слева (где $g \cdot (e_1, \dots, e_n) = (g_* e_1, \dots, g_* e_n)$), и в силу соглашения I.4 мы получаем отображение $(\cdot): T(K) \times L(M) \rightarrow T(L(M))$.

Лемма I.5. Множество касательных подпространств $Q_u \subset (L(M))_u$ вдоль слоя $\tilde{\pi}^{-1}(o) \subset L(M)$, заданных правилом $Q_u = \mathfrak{m} \cdot u$, H -инвариантно и удовлетворяет условиям $\tilde{\pi}_*(Q_u) = M_0, Q_{us} = (R_s)_* Q_u$ для $u \in \tilde{\pi}^{-1}(o), s \in GL(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. Для $h \in H$, $u \in \tilde{\pi}^{-1}(0)$ имеем

$$(L_h)_* Q_u = (L_h)(\mathbb{M}_e \cdot u) = \mathbb{M}_h \cdot u = ((R_h)_* \mathbb{M}_e) \cdot u = \mathbb{M}_e(h \cdot u) = Q_{h \cdot u}.$$

Далее,

$$\tilde{\pi}_*(Q_u) = \tilde{\pi}_*(\mathbb{M}_e \cdot u) = \mathbb{M}_e \cdot 0 = \pi_*(\mathbb{M}_e) = M_0.$$

Таким образом, $g \cdot (us) = (g \cdot u)s$ для $g \in K$, $u \in \tilde{\pi}^{-1}(0)$, $s \in GL(n, \mathbb{R})$. $\square$

Так как K действует транзитивно на множестве всех слоёв расслоения $L(M)$, то мы получаем

Предложение I.6. Существует единственная K -инвариантная связность в расслоении $L(M)$, такая что горизонтальные подпространства вдоль слоя $\tilde{\pi}^{-1}(0)$ определяются правилом $Q_u = \mathbb{M} \cdot u$.

Определение I.7. Связность Γ , построенная в предложении I.6, называется канонической связностью редуктивного однородного пространства K/H .⁷⁾

Предложение I.8. Каноническая связность редуктивного однородного пространства $M = K/H$ является единственной K -инвариантной связностью в расслоении $L(M)$ со следующим свойством: для каждого репера u в точке 0 и для каждого $X \in \mathbb{M}$ орбита $\exp(tX) \cdot u$ горизонтальна.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\exp tX \cdot u) &= \frac{d}{d\tau} \Big|_0 (\exp(t+\tau)X \cdot u) \\ &= (\exp tX)_* \frac{d}{d\tau} \Big|_0 (\exp \tau X \cdot u) = (\exp tX)_*(X \cdot u). \end{aligned}$$

Пусть Q_z обозначает горизонтальное подпространство канонической связности в точке $z \in L(M)$. Тогда $X \cdot u \in Q_u$ и

$$\frac{d}{dt}(\exp tX \cdot u) \in (\exp tX)_* Q_u = Q_{\exp tX \cdot u}.$$

Следовательно, $\frac{d}{dt}(\exp tX \cdot u)$ — горизонтальное поле.

Утверждение о единственности очевидным образом вытекает из предложения I.6. $\square$

Следствие I.9. Рассмотрим каноническую связность Γ на $M = K/H$.

(i) Для каждого $X \in \mathbb{M}$ положим $x(t) = \exp tX \cdot 0$ в M .

Тогда параллельные перенесения касательных векторов в точке

о вдоль кривой $x(t)$, $0 \leq t \leq s$, совпадают с дифференциалом отображения $\exp sX \in K$, действующего на M .

(ii) Для каждого $X \in \mathfrak{M}$ кривая $x(t) = \exp tX \cdot o$ является геодезической. Обратно, каждая геодезическая, исходящая из точки o , имеет вид $\exp tX \cdot o$ для некоторого $X \in \mathfrak{M}$.⁸⁾

(iii) Каноническая связность на M полна.

Доказательство. (i) следует почти немедленно из предложения I.8. В самом деле, выберем $u \in L(M)$ в точке o . Поскольку $\exp tX \cdot u$ есть горизонтальная кривая, которая проектируется на кривую $x(t)$, $0 \leq t \leq s$, легко видеть, что для любого $Y \in M_o$

$$(\exp tX)_*(Y) = (\exp tX \cdot u) \cdot (u^{-1}Y)$$

параллельно вектору Y вдоль кривой $x(t)$, $0 \leq t \leq s$ (здесь u^{-1} рассматривается как отображение $u^{-1}: M_o \rightarrow \mathbb{R}^n$). (ii) следует из (i), поскольку касательный вектор $x'(t)$ равен $(\exp tX)_*(x'(0))$. (iii) немедленно вытекает из (ii), так как $\exp tX$ определено для всех t . $\square$

В соответствии с результатами, изложенными в приложении A, мы будем отождествлять каноническую связность Γ на K/H и соответствующую аффинную связность ∇ на M .

Предложение I.10. Каноническая связность — единственная K -инвариантная аффинная связность на M , такая что для каждого $X \in \mathfrak{M}$ и каждого векторного поля $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X^* Y)_o = [X^*, Y]_o, \quad (1)$$

где X^* обозначает векторное поле, порождённое действием X на M ($X_p^* = X \cdot p$ для каждого $p \in M$).

Доказательство. Инфинитезимальная версия утверждения (i) следствия I.9 гласит, что $(\nabla_X^* Y)_o = (\mathcal{L}_X^* Y)_o$, где $\mathcal{L}$ обозначает производную Ли. Следовательно, каноническая связность удовлетворяет соотношению (1). С другой стороны, знание ковариантной производной $(\nabla_X^*)_o$, $X \in \mathfrak{M}$, и K -инвариантность канонической связности определяют связность ∇ на M единственным образом. $\square$

Предложение I.11. Если тензорное поле на M инвариантно при действии K , то оно параллельно относительно канонической связности ∇ .

Доказательство. Пусть S — K -инвариантное тензорное поле на M .

Тогда $\mathcal{L}_{X^*} S = 0$, откуда $(\nabla_{X^*} S)_0 = (\mathcal{L}_{X^*} S)_0 = 0$ для каждого $X \in \mathfrak{M}$, т.е. $(\nabla S)_0 = 0$. (Здесь ковариантная производная $(\nabla_{X^*})_0$ и производная Ли $(\mathcal{L}_{X^*})_0$ продолжаются до дифференцирований тензорной алгебры над M_0 .) Из K -инвариантности ∇ и S вытекает, что $\nabla S = 0$ тождественно. $\square$

Следствие I.12. Относительно канонической связности редуктивного однородного пространства поле тензора кривизны и поле тензора кручения параллельны: $\nabla R = 0$, $\nabla T = 0$.

Предложение I.13. Для полей тензоров кривизны и кручения канонической связности многообразия M справедливы следующие формулы:

$$T(X, Y)_0 = -[X, Y]_{\mathfrak{M}} \quad \text{для } X, Y \in \mathfrak{M}, \quad (2)$$

$$(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\mathfrak{H}}, Z] \quad \text{для } X, Y, Z \in \mathfrak{M}, \quad (3)$$

где $\mathfrak{M}$ отождествляется сначала с $\mathfrak{M}_e \subset K_e$, а затем с касательным пространством M_0 при помощи проекции $\pi: K \rightarrow M$. (Индексы при скобках указывают взятие $\mathfrak{M}$ -компоненты или $\mathfrak{H}$ -компоненты вектора алгебры $\mathfrak{F}$.)

Доказательство. Строго говоря, нам нужно доказать соотношения

$$T(X \cdot o, Y \cdot o) = -([X, Y]_{\mathfrak{M}}) \cdot o \quad \text{для } X, Y \in \mathfrak{M}, \quad (2')$$

$$R(X \cdot o, Y \cdot o)(Z \cdot o) = -[[X, Y]_{\mathfrak{H}}, Z] \cdot o \quad \text{для } X, Y, Z \in \mathfrak{M}. \quad (3')$$

А) Предположим сначала, что K действует эффективно на $M = K/H$. Выберем $u_0 \in \tilde{\pi}^{-1}(o)$ в $L(M)$. Рассмотрим изоморфизм групп Ли $\lambda: H \rightarrow G \subset GL(n, \mathbb{R})$ и изоморфное вложение f расслоения $K(M, H)$ в расслоение $L(M, GL(n, \mathbb{R}))$ как G -структуру (см. I.3) $P(M, G)$. В частности, $f(q) = q \cdot u_0$ для каждого $q \in K$. Легко видеть, что для канонической связности Γ в $L(M)$ горизонтальные подпространства Q_u в точках $u \in P(M, G)$ всегда касательны к $P(M, G)$. Значит, каноническая связность обладает редукцией Γ_P к G -структуре $P(M, G)$.

Пусть X — векторное поле на K . Тогда соответствующее векторное поле $f_*(X)$ на P будет обозначаться X' . Ясно, что отображение $X \rightarrow X'$ есть изоморфизм между (бесконечномерными) алгебрами Ли $\mathfrak{X}(K)$ и $\mathfrak{X}(P)$. Положим $\mathfrak{M}' = \{X': X \in \mathfrak{M}\}$. Ясно, что $\mathfrak{M}'$ состоит из K -инвариантных и горизонтальных векторных полей на P (относительно связности Γ_P). Отметим, что для каждого $X \in \mathfrak{M}'$ $X'_{u_0} = X \cdot u_0 \in P_{u_0}$ есть поднятие (лифт) $X \cdot o \in M_0$.

Теперь выберем $X, Y \in \mathfrak{m}$ и рассмотрим форму связности ω и каноническую форму Θ (см. приложение А). Тогда $\omega(X') = \omega(Y') = 0$, так как X', Y' горизонтальны, а $\Theta(X'), \Theta(Y') \in \mathbb{R}^n$ постоянны, потому что X', Y' K -инвариантны на P . В силу (А2) из приложения А

$$\Theta(X', Y') = d\Theta(X', Y') = \frac{1}{2} \{ X' \Theta(Y') - Y' \Theta(X') - \Theta([X', Y']) \} = -\frac{1}{2} \Theta([X', Y']).$$

Следовательно,

$$\Gamma(X \cdot o, Y \cdot o) = u_o(2\Theta(X'_{u_o}, Y'_{u_o})) = -u_o(\Theta[X', Y']_{u_o}) = -\tilde{\pi}_*([X', Y']_{u_o})$$

(здесь $[X', Y']_{u_o} = [X, Y]_{u_o}'$ есть поднятие $[X, Y] \cdot o = [X, Y]_{\mathfrak{m}} \cdot o$), откуда и следует (2').

Далее, для $X, Y \in \mathfrak{m}$ имеем в силу (А1) (приложение А)

$$\Omega(X', Y') = d\omega(X', Y') = \frac{1}{2} \{ X' \omega(Y') - Y' \omega(X') - \omega([X', Y']) \} = -\frac{1}{2} \omega([X', Y']).$$

Выберем $Z \in \mathfrak{m}$ и положим $\zeta = u_o^{-1}(Z \cdot o)$. Тогда

$$\begin{aligned} R(X \cdot o, Y \cdot o)(Z \cdot o) &= u_o(2\Omega(X'_{u_o}, Y'_{u_o}))\zeta \\ &= -u_o(\omega([X', Y']_{u_o}))\zeta = -u_o(\lambda_{*e}([X, Y]_{\mathfrak{h}}))\zeta. \end{aligned}$$

Вспомним, что линейное изотропное представление группы N (или алгебры $\mathfrak{h}$) в M_o соответствует сужению на $\mathfrak{m}$ присоединённого представления группы N (или алгебры $\mathfrak{h}$) в $\mathfrak{f}$. (Здесь для $A \in \mathfrak{h}$ и $w \in M_o$ вектор $Aw \in M_o$ определяется формулой $Aw = \frac{d}{dt} \Big|_0 (\exp tA)_* w$). Далее, $[u_o \lambda(h)]\zeta = h_*(u_o \zeta) = h_*(Z \cdot o)$ для $h \in N$ (в соответствии с определением λ), откуда $[u_o \lambda_*(A)]\zeta = A(Z \cdot o)$ для $A \in \mathfrak{h}$. Следовательно,

$$-u_o(\lambda_*[X, Y]_{\mathfrak{h}})\zeta = -[X, Y]_{\mathfrak{h}}(Z \cdot o) = -(\text{ad}([X, Y]_{\mathfrak{h}})Z) \cdot o.$$

Это завершает доказательство для рассматриваемого случая.

В) Предположим теперь, что действие K не эффективно на K/N , и обозначим через $N \subset K$ замкнутую нормальную подгруппу всех элементов $g \in K$, действующих как тождественное преобразование на M . Мы имеем: $N \subset N$, алгебра Ли $\mathfrak{n}$ группы N есть идеал в $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$. Положим $K' = K/N$, $N' = N/N$. Тогда однородное пространство K'/N' канонически диффеоморфно пространству $M = K/N$ и K' действует на M эффективно. Кроме того, K'/N' редуктивно относительно разложения $\mathfrak{f}' = \mathfrak{h}' + \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}/\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}/\mathfrak{n}$. Дей-

ствие множества $\exp(\mathfrak{m})$ на M или $L(M)$ имеет одинаковый смысл для обоих однородных пространств, K/H и K'/H' , и связность в $L(M)$ K -инвариантна, если и только если она K' -инвариантна. Согласно предложению I.8, канонические связности на K/H и K'/H' совпадают.

Далее, для однородного пространства K'/H' выполняются (2') и (3'). Обозначая через $[,]$ и $\langle , \rangle$ скобки Ли в $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{k}'$ соответственно, мы получаем для $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

$$[X, Y]_{\mathfrak{m}} = \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{m}}, \quad [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z] \cdot o = \langle \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{h}}, Z \rangle \cdot o.$$

Значит, (2') и (3') выполняются также и для однородного пространства K/H . $\square$

Соглашение I.14. В последующем мы всегда будем обозначать каноническую связность редуктивного однородного пространства через $\tilde{\nabla}$, а соответствующие поля тензоров кривизны и кручения через $\tilde{K}$ и $\tilde{T}$ соответственно.

Теорема I.15 (К. Номидзу [N]). Пусть $K/H = M$ — редуктивное однородное пространство относительно разложения $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. Тогда существует биективное соответствие между K -инвариантными аффинными связностями на M и билинейными отображениями $D: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, такими что

$$D(ad(h)X, ad(h)Y) = ad(h)D(X, Y)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$, $h \in H$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\nabla}$ обозначает каноническую аффинную связность в M , а ∇ — K -инвариантную аффинную связность. Тогда мы отождествляем $\mathfrak{m}$ с M_o и полагаем $D = (\nabla - \tilde{\nabla})_o$ (тензор разности в o).

Обратно, если D — отображение $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ в $\mathfrak{m}$, описанное выше, то мы полагаем $\nabla_o = \tilde{\nabla}_o + D$. Тогда ∇_o есть H -инвариантный элемент аффинной связности в начале o , и мы можем продолжить его единственным образом до K -инвариантной аффинной связности ∇ на M . (Здесь мы приняли во внимание формулу (A.10) из приложения A.) $\square$

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

Предложение I.16. Пусть M — многообразие с аффинной связностью, такой что $\nabla T = 0$, $\nabla K = 0$, и $o \in M$ — его произвольная точка. Обозначим M_o через V . Тогда для любых X, Y

$\in V$ эндоморфизм $R_0(X, Y)$, действующий как дифференцирование тензорной алгебры $\mathcal{Z}(V)$, удовлетворяет условиям:

- (a) $R_0(X, Y)(R_0) = R_0(X, Y)(T_0) = 0$;
 - (b) $R_0(X, Y) = -R_0(Y, X)$, $T_0(X, Y) = -T_0(Y, X)$,
 - (c) $\mathcal{C}\{R_0(X, Y)Z - T_0(T_0(X, Y), Z)\} = 0$ (первое тождество Бьянки);
 - (d) $\mathcal{C}\{R_0(T_0(X, Y), Z)\} = 0$ (второе тождество Бьянки).
- Здесь $\mathcal{C}$ обозначает циклическую сумму по X, Y, Z .⁹⁾

Доказательство. (a) следует из свойств $\nabla R = 0$, $\nabla T = 0$, (b) очевидно, (c) и (d) – тождества Бьянки для случая $\nabla R = 0$, $\nabla T = 0$ (см. приложение А, (A8) и (A9)). $\square$

Обратно, пусть V – конечномерное вещественное векторное пространство, а T_0, R_0 – тензоры на V типа $(1, 2)$, $(1, 3)$ соответственно, удовлетворяющие условиям (a) – (d).

Пусть $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли всех эндоморфизмов A пространства V , которые как дифференцирования тензорной алгебры $\mathcal{Z}(V)$ удовлетворяют соотношениям $A(R_0) = A(T_0) = 0$. В частности, мы имеем $R_0(X, Y) \in \mathfrak{h}$ для всех $X, Y \in V$ (аксиома (a)). Определим алгебру Ли $\mathfrak{f}$ как прямую сумму $V + \mathfrak{h}$ с умножением, заданным формулами

$$\left. \begin{aligned} [X, Y] &= -T_0(X, Y) - R_0(X, Y) \\ [A, X] &= AX \\ [A, B] &= AB - BA \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X, Y &\in V, \\ A, B &\in \mathfrak{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко проверяется, что тождества Якоби следуют из условий (c) и (d) (см. [N]).

Пусть K – связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{f}$ и H – связная подгруппа Ли, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{f}$. Легко показать на примерах, что, вообще говоря, подгруппа H не обязана быть замкнутой в K .

Определение I.17. Рассмотренный выше триплет (V, R_0, T_0) называется замкнутым, если H является замкнутой подгруппой группы K .

Теорема I.18. Пусть V – конечномерное вещественное векторное пространство, а T_0, R_0 – тензоры на V типа $(1, 2)$, $(1, 3)$ соответственно, удовлетворяющие условиям (a) – (d). Предположим, что триплет (V, R_0, T_0) замкнут. Тогда имеется единственное связное односвязное многообразие M с полной аффинной связностью $\tilde{\nabla}$, такое что для каждой точки

$x \in M$ существует линейный изоморфизм $f: V \rightarrow M_x$, удовлетворяющий условиям $f(T_0) = \tilde{T}_x$, $f(R_0) = \tilde{R}_x$ (здесь "единственное" означает "единственное с точностью до аффинного диффеоморфизма"). Кроме того, M может быть превращено в редуктивное однородное пространство K/H , для которого $\tilde{V}$ есть каноническая связность. В частности, $\tilde{V}\tilde{T} = 0$, $\tilde{V}\tilde{R} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим однородное многообразие K/H . Оно односвязно и редуктивно относительно разложения $\mathfrak{K} = V + \mathfrak{h}$. Обозначим через $\tilde{V}$ каноническую связность многообразия K/H .

Отождествим сначала $\mathfrak{K} = V + \mathfrak{h}$ с касательным пространством K_e , а затем V с касательным пространством $(K/H)_o$ в начале с помощью проекции $\pi: K \rightarrow K/H$. Тогда T_0, R_0 , рассматриваемые как тензоры над $(K/H)_o$, инвариантны относительно изотропного представления группы H (см. определение алгебры $\mathfrak{h}$). Далее мы можем продолжить тензоры T_0, R_0 до инвариантных тензорных полей T, R на K/H . По следствию I.9 мы также имеем $\tilde{V}T = \tilde{V}R = 0$. Покажем, что тензоры T и R равны соответственно тензорному полю кручения $\tilde{T}$ и тензорному полю кривизны $\tilde{R}$ связности $\tilde{V}$. Действительно, в силу (2) - (4) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{T}(X, Y)_o &= -[X, Y]_V = T_0(X, Y), \\ (\tilde{R}(X, Y)Z)_o &= -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z] = R_0(X, Y)Z\end{aligned}$$

для $X, Y, Z \in V$. Так как $T, \tilde{T}, R, \tilde{R}$ K -инвариантны, мы получаем $T = \tilde{T}, R = \tilde{R}$. Пусть для $x \in K/H$ элемент $g \in K$ таков, что $\pi(g) = x$. Положим $f = (Lg)_*$. Тогда $f(T_0) = \tilde{T}_x$, $f(R_0) = \tilde{R}_x$, как и требуется. Наконец, такое аффинное многообразие $(M, \tilde{V})$ единственно согласно теореме B8 (приложение B). $\square\square$

Для приложений полезен следующий результат:

Предложение I.19. Пусть (V, T_0, R_0) - замкнутый триплет, как в теореме I.18. Тогда описанная выше конструкция приводит к тому же самому многообразию с аффинной связностью $(M, \tilde{V})$, если мы заменим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ любой её подалгеброй $\mathfrak{h}'$, предполагая только, что $R_0(X, Y) \in \mathfrak{h}'$ для всех $X, Y \in V$.

Доказательство. Пусть $M = K/H$ - однородное пространство, построенное в теореме I.18. Тогда $\mathfrak{K}' = V + \mathfrak{h}'$ есть подалгебра в $\mathfrak{K}$; пусть $K' \subset K$ - соответствующая связная подгруппа. Стандартные рассуждения показывают, что K' действует на M транзитивно. Зна-

чит, подгруппа $H' < K$, соответствующая алгебре $\mathfrak{h}'$, есть максимальная связная подгруппа в K' , оставляющая начало o неподвижным. Следовательно, H' замкнута в K' .

Пусть теперь $\tilde{K}'$ — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{h}}$. Мы можем рассматривать $\tilde{K}'$ как универсальную накрывающую группу группы K' , и связная подгруппа $\tilde{H}' < \tilde{K}'$, соответствующая алгебре $\tilde{\mathfrak{h}}$, накрывает H' . Отсюда следует, что $\tilde{H}'$ замкнута в $\tilde{K}'$. Далее продолжаем доказательство, как во второй части доказательства теоремы I.18. $\square$

Следствие I.20. Пусть (M, ∇) — связное многообразие с аффинной связностью, такой что $\nabla R = \nabla T = 0$. Тогда (M, ∇) локально-аффинно-диффеоморфно многообразию $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$, где $\tilde{M}$ — односвязное редуктивное однородное пространство K/H , а $\tilde{\nabla}$ — его каноническая связность. (См. [N].)

Доказательство. Используем предложение I.16, доказательство теоремы I.18 и теорему B7 из приложения B. Нетрудно видеть, что в этой специальной ситуации наша структура замкнута. $\square$

ГРУППА ТРАНСВЕКЦИЙ

Пусть (M, ∇) — связное многообразие с аффинной связностью, $u_0 \in L(M)$ — фиксированный репер в некоторой точке $o \in M$, а $P(u_0)$ — расслоение голономии с опорной точкой u_0 , т.е. множество всех $u \in L(M)$, которые можно соединить с u_0 (кусочно-дифференцируемой) горизонтальной кривой. Далее, пусть $\Phi(u_0)$ обозначает группу голономии с опорной точкой u_0 . Группа $\Phi(u_0) < GL(n, \mathbb{R})$ изоморфна группе голономии $\Psi(o)$ с точкой отсчёта o (см. B5). Пусть Γ обозначает соответствующую связность в $L(M)$.

I.21. Знаменитая теорема редукции (см. [КН1]') гласит, что:

- (i) $P(u_0)$ — дифференцируемое подрасслоение расслоения $L(M)$ со структурной группой $\Phi(u_0)$;
- (ii) связность Γ редуцируема к связности в $P(u_0)$.

Пусть $f: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм, а $\tilde{f}: L(M) \rightarrow L(M)$ — индуцированный автоморфизм расслоения $L(M)$. Ясно, что если $\tilde{f}$ сохраняет фиксированное расслоение голономии $P(u_0)$, то оно также сохраняет расслоение голономии $P(u)$ для каждого $u \in L(M)$.

Определение I.22. Пусть (M, ∇) — связное многообразие с аффинной связностью. Группа всех аффинных преобразований много-

образия M , сохраняющих каждое расслоение голономии $P(u)$, $u \in L(M)$, называется группой трансвекций многообразия (M, V) . Она будет обозначаться через $Tr(M, V)$ или просто $Tr(M)$.

Замечание I.23. Более геометрично, аффинное преобразование φ многообразия (M, V) принадлежит группе $Tr(M)$, если и только если для каждой точки $p \in M$ имеется кусочно-дифференцируемая кривая γ , соединяющая p с $\varphi(p)$, такая что касательное отображение $\varphi_{*p} : M_p \rightarrow M_{\varphi(p)}$ совпадает с параллельным переносом вдоль γ .

Предложение I.24. Группа трансвекций многообразия (M, V) есть нормальная подгруппа группы $A(M)$ всех аффинных преобразований.

Доказательство. Пусть $q \in Tr(M)$, $\varphi \in A(M)$, и пусть Q — подрасслоение голономии. Тогда $\tilde{q}(Q) \subset Q$. Далее,

$$(\tilde{\varphi} \circ q \circ \tilde{\varphi}^{-1})(Q) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{q}(\tilde{\varphi}^{-1}(Q)) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}^{-1}(Q)) = Q$$

(здесь мы использовали тот факт, что $\tilde{\varphi}^{-1}(Q)$ — также подрасслоение голономии). $\square$

Теорема I.25. Пусть (M, V) — связное многообразие с аффинной связностью. Следующие два условия эквивалентны:

(i) группа трансвекций $Tr(M)$ действует транзитивно на каждом расслоении голономии $P(u) \subset L(M)$;

(ii) M может быть представлено как редуктивное однородное пространство K/H относительно разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, где K эффективна на M , а V — каноническая связность в K/H .

Более подробно, если выполнено (i), то $Tr(M)$ — связная группа Ли и M может быть представлено в виде (ii) с $K = Tr(M)$. Для каждого представления многообразия M в виде (ii) $Tr(M)$ есть нормальная подгруппа Ли группы K , и её алгебра Ли изоморфна идеалу $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ в $\mathfrak{g}$. (См. также [KH2]¹, стр. 181.)

Замечание I.26. Условие (i) означает геометрически, что для каждой кусочно-дифференцируемой кривой γ , соединяющей некоторые две точки $p, q \in M$, имеется преобразование $q \in Tr(M)$, такое что $q(p) = q$ и касательное отображение $q_{*p} : M_p \rightarrow M_q$ совпадает с параллельным переносом вдоль γ .

В частности, если выполнено (i), то подгруппа изотропии группы $Tr(M)$ в любой точке $p \in M$ изоморфна группе голономии с точкой отсчёта p .

Доказательство теоремы I.25. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $\text{Tr}(M)$ действует транзитивно на расслоении $P(u_0)$, где $u_0 \in L(M)$ — репер в точке $o \in M$. Тогда $\text{Tr}(M)$ одностранзитивна на $P(u_0)$. Пусть $A(M)$ — группа Ли всех аффинных преобразований на M , а $A(u_0) \subset L(M)$ — подрасслоение, порождённое действием $A(M)$ на u_0 . Отображение $g \mapsto g \cdot u_0$ есть диффеоморфизм между $A(M)$ и $A(u_0)$.

Согласно I.21 (теорема редукции), $P(u_0)$ есть дифференцируемое подрасслоение в $L(M)$, а значит и в $A(u_0)$. Если мы отождествим $\text{Tr}(M)$ с $P(u_0)$ и снабдим $\text{Tr}(M)$ соответствующей дифференцируемой структурой, то $\text{Tr}(M)$ становится связной подгруппой Ли в $A(M)$. В дальнейшем будем обозначать группу $\text{Tr}(M)$ через K , а её алгебру Ли — через $\mathfrak{K}$.

Пусть $\{Q_u\}$ — горизонтальное распределение на $L(M)$, соответствующее связности Γ . Так как Γ редуцируема к $P(u_0)$, то подпространства Q_u касательны к $P(u_0)$ для $u \in P(u_0)$. Далее, распределение $\{Q_u\}$ является K -инвариантным.

Пусть $H \subset K$ — подгруппа, сохраняющая слой расслоения $P(u_0)$ над o . Тогда $M \approx K/H$ и K эффективна на M . Рассмотрим линейный изоморфизм $\hat{u}_0: \mathfrak{K} \rightarrow (P(u_0))_{u_0}$, задаваемый соответствием $X \mapsto X \cdot u_0$ для $X \in \mathfrak{K}$. Тогда разложение $(P(u_0))_{u_0}$ на вертикальное подпространство Φ_{u_0} и горизонтальное подпространство Q_{u_0} соответствует разложению $\mathfrak{K} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H , а $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{K}$ — линейное подпространство. Легко проверить, что $\text{ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Кроме того, $Q_u = \mathfrak{m} \cdot u$ вдоль слоя расслоения $L(M)$ над точкой o . Итак, K/H — редуктивное однородное пространство и Γ — его каноническая связность. $\square$

Предположим теперь, что выполнено условие (ii) , и пусть L обозначает группу Ли из предложения I.1. Покажем, что $L \subset \text{Tr}(M)$ L транзитивна на расслоении $P(u_0)$ и $L = \text{Tr}(M)$. Пусть $\pi: K \rightarrow K/H = M$ — проекция.

Лемма I.27. Для $p \in M$ обозначим через $\mathfrak{m}_p$ подпространство $\text{ad}(g)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{K}$, где g — любой элемент из K , удовлетворяющий условию $g \in \pi^{-1}(p)$. Тогда $\mathfrak{m}_p$ не зависит от выбора g и $\mathfrak{K} = \mathfrak{m}_p + [\mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_p]$.¹⁰⁾ Далее, группа L порождается множеством $\exp(\mathfrak{m}_p)$.

Доказательство. Редуктивность K/H означает, что $\text{ad}(h)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ для $h \in H$; отсюда следует, что $\mathfrak{m}_p$ не зависит от выбора $g \in \pi^{-1}(p)$. Далее, $\mathfrak{K}$ есть идеал в $\mathfrak{K}$, и, значит, $\text{ad}(g)\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ для $g \in K$. Поэтому $\mathfrak{m}_p + [\mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_p] = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{K}$. Наконец, L

порождается множеством $\exp(\mathfrak{M})$ (см. I.1), откуда вытекает, что $L = \text{ad}(g)L$ порождается множеством $\text{ad}(g)(\exp \mathfrak{M}) = \exp(\mathfrak{M}_p)$. $\square$

Лемма I.28. Глобальная 1-параметрическая подгруппа $f_t = \exp tX$, $X \in \mathfrak{M}_p$, обладает тем свойством, что кривая $x_t = f_t(p)$ — геодезическая и касательное отображение $(f_s)_*p$ совпадает с параллельным переносом вдоль кривой x_t , $0 \leq t \leq s$.

Доказательство. Для $p = o$ (начало) лемма эквивалентна следствию I.9, (i). Для произвольного $p \in M$ и $X \in \mathfrak{M}_p$ положим $X = \text{ad}(g)Y$, где $g \in K$, $Y \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\exp tY)(o)$ есть геодезическая и касательное отображение $(\exp sY)_*o$ совпадает с параллельным переносом вдоль $(\exp tY)(o)$, $0 \leq t \leq s$. Далее, $f_t = g \circ \exp tY \circ g^{-1}$ и $x_t = [g \circ \exp tY](o)$. Так как g — аффинное преобразование многообразия (M, ∇) , то x_t — геодезическая и $(f_s)_*p = g_* \circ (\exp sY)_*o \circ g_*^{-1}$ совпадает с параллельным переносом вдоль кривой x_t , $0 \leq t \leq s$. $\square$

Так как K эффективна на $M = K/H$, мы можем теперь рассматривать K как группу аффинных преобразований многообразия (M, ∇) . Обозначим через $\text{Tr}^*(M)$ группу всех преобразований $g \in K$ со следующим свойством: для каждой точки $p \in M$ имеется ломаная геодезическая γ , идущая из p в точку $g(p)$, такая что преобразование g_*p совпадает с параллельным переносом вдоль γ .

Очевидно, $\text{Tr}^*(M) \subset \text{Tr}(M)$. Мы собираемся сейчас доказать, что $L \subset \text{Tr}^*(M)$. Для каждой точки $p \in M$ пусть $\text{Tr}^*(p)$ обозначает множество всех преобразований $g \in K$, таких что g_*p совпадает с параллельным переносом вдоль ломаной геодезической γ , идущей из точки p в точку $g(p)$. Тогда $\text{Tr}^*(M) = \bigcup_{p \in M} \text{Tr}^*(p)$. Этого достаточно, чтобы показать, что $L \subset \text{Tr}^*(p)$ для каждой точки $p \in M$.

Пусть задана точка $p \in M$. Согласно лемме I.27, группа L порождается множеством $\exp(\mathfrak{M}_p)$. Это значит, что $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i(p)$, где

$$L^i(p) = \{ g \in L; g = \exp X_1 \dots \exp X_i, X_1, \dots, X_i \in \mathfrak{M}_p \}.$$

По лемме I.28 имеем $L^1(p) \subset \text{Tr}^*(p)$. Предположим, что $L^i(p) \subset \text{Tr}^*(p)$, и пусть $g \in L^{i+1}(p)$, т.е. $g = g' h$ с $g' \in L^i(p)$ и $h = \exp X$, $X \in \mathfrak{M}_p$. Тогда имеется ломаная геодезическая γ' , идущая из точки p в точку $g'(p)$, такая что g' индуцирует параллельный перенос вдоль γ' . С другой стороны, мы можем написать $g = h' g'$, где $h' = \text{Ad}(g')h = \exp X'$ для $X' = \text{ad}(g')X$. Здесь $X' \in \mathfrak{M}_{g'(p)}$. Используя лемму I.28 ещё раз, для нового начала $g'(p)$,

мы видим, что преобразование h' индуцирует параллельный перенос вдоль геодезической соединяющей $q'(p)$ с $q(p) = (h'q')(p)$. Таким образом, $q \in \text{Tr}^*(p)$. Тем самым мы доказали по индукции, что $L^i(p) \subset \text{Tr}^*(p)$ для всех $i = 1, 2, \dots$, откуда $L \subset \text{Tr}^*(M)$. $\square$

Нам потребуются ещё две леммы.

Лемма I.29. Для каждой ломаной геодезической $\gamma = pq$ в пространстве M имеется элемент $g \in L$, такой что параллельный перенос вдоль γ совпадает с касательным отображением g_*p .

Доказательство. Пусть γ состоит из всех геодезических дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, исходящих из точек $p = p_1, \dots, p_k$ соответственно. Тогда параллельный перенос вдоль γ_i задаётся дифференциалом преобразования $h_i = \exp X_i$, где $X_i \in \mathfrak{m}_{p_i} \subset \mathfrak{g}$. Итак, параллельный перенос вдоль γ задаётся дифференциалом от $h = h_k \dots h_1 \in L$. $\square$

Лемма I.30. Пусть $L(p)$ — группа изотропии группы L в точке $p \in M$, а $L^\circ(p)$ — её связная компонента. Тогда $L^\circ(p)$ изоморфна суженной группе голономии $\Psi^\circ(p)$ многообразия (M, V) с точкой отсчёта p .

Доказательство. Достаточно доказать наше утверждение для $p = o$. Алгебра Ли группы $L^\circ(o)$ изоморфна $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = (\mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) \cap \mathfrak{h}$. Значит, она порождается всеми элементами вида $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$, $X, Y \in \mathfrak{m}$. В силу (3) и B9 она изоморфна алгебре голономии $\mathfrak{g}(o)$ с точкой отсчёта o . Отсюда и следует утверждаемый результат. $\square$

Теперь мы докажем, что $L \subset \text{Tr}(M)$ действует транзитивно на любом расслоении голономии $P(u_0)$, $u_0 \in \tilde{\pi}^{-1}(o)$. Согласно теореме редукции I.2I, если мы рассмотрим отображение $S \mapsto u_0 S$ группы $GL(n, \mathbb{R})$ на слой $\tilde{\pi}^{-1}(o) \subset L(M)$, то группа голономии $\Phi(u_0)$ отобразится на $\tilde{\pi}^{-1}(o) \cap P(u_0)$, а суженная группа голономии $\Phi^\circ(u_0)$ отобразится на связную компоненту $C(u_0)$ точки u_0 в $\tilde{\pi}^{-1}(o) \cap P(u_0)$. Далее, группа L действует свободно на $P(u_0)$, и для каждого $g \in L^\circ(o)$ мы имеем $g \cdot u_0 \in C(u_0)$. Рассмотрим гомоморфизм $\lambda: L^\circ(o) \rightarrow \Phi^\circ(u_0)$, заданный соотношением $g \cdot u_0 = u_0 \lambda(g)$ (см: доказательство предложения I.3). Так как а) λ инъективно, б) $L^\circ(o) \simeq \Psi^\circ(o) \simeq \Phi^\circ(u_0)$, в) $L^\circ(o)$ и $\Phi^\circ(u_0)$ связны, мы получаем $\lambda(L^\circ(o)) = \Phi^\circ(u_0)$. Следовательно, $L^\circ(o)$ транзитивна на $C(u_0)$.

Теперь, каждый гомотопический класс (кусочно-дифференцируемых) петель в o может быть представлен замкнутой ломаной геодезической. По лемме I.29 подгруппа изотропии $L(o)$ транзитивна на слое $\tilde{\pi}^{-1}(o) \cap P(u_0)$. Отсюда вытекает, что L транзитивна на

$P(u_0)$. Как следствие мы получаем соотношение $L = \text{Tr}(M)$. Этим завершается доказательство теоремы. $\square \square$

Замечание I.31. Для доказательства импликации $(ii) \Rightarrow (i)$ тот факт, что K действует на M эффективно, не является существенным. Действительно, как было показано в части В доказательства теоремы I.13, всегда можно заменить K её факторгруппой K' , действующей эффективно.

АФФИНЫЕ РЕДУКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

На основе предыдущей теоремы мы можем ввести следующее определение:

Определение I.32. Связное многообразие (M, ∇) с аффинной связностью называется аффинным редуктивным пространством, если группа $\text{Tr}(M, \nabla)$ действует транзитивно на каждом расслоении голономии $P(u_0) \subset L(M)$.

Таким образом, у нас имеются "внешнее" и "внутреннее" определения того, что мы понимаем под редуктивным пространством. Теорема I.25 позволяет нам также установить взаимно-однозначное соответствие между объектами, описываемыми этими определениями.

Редуктивное однородное пространство K/H с разложением $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ называется примарным, если K действует эффективно на K/H и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$. Связное многообразие (M, ∇) с аффинной связностью называют многообразием с отмеченной точкой (или пунктированным), если задана фиксированная точка (начало) $o \in M$.

Теорема I.33. Имеется биективное соответствие между аффинными редуктивными пространствами с отмеченной точкой $(M, \tilde{\nabla}, o)$ и примарными редуктивными однородными пространствами K/H с заданным разложением. В одну сторону это соответствие задаётся условиями: $K = \text{Tr}(M)$, $H = K_o$, а в другую — условиями: $M = K/H$, $\tilde{\nabla}$ — каноническая связность в K/H .

Доказательство. Это очевидно. $\square$

Предложение I.34. Пусть K — связная группа Ли и $\tilde{\nabla}$ — её каноническая связность (т.е. картанова $(-)$ -связность). Тогда $(K, \tilde{\nabla})$ есть аффинное редуктивное пространство и $\text{Tr}(K, \tilde{\nabla}) = K_l$ — группа всех левых сдвигов группы K .

Доказательство. Теорема I.25 гласит, что для $\mathfrak{h} = 0$ группы $\text{Tr}(K)$ и K обладают изоморфными алгебрами Ли. С другой стороны, $\text{Tr}(K)$ — нормальная подгруппа Ли в группе K_l . $\square$

Теорема I.35. Пусть $(M_1, \tilde{\nabla}_1), (M_2, \tilde{\nabla}_2)$ – аффинные редуктивные пространства. Тогда прямое произведение $(M_1 \times M_2, \tilde{\nabla}_1 \times \tilde{\nabla}_2)$ есть аффинное редуктивное пространство и

$$\text{Tr}(M_1 \times M_2) = \text{Tr}(M_1) \times \text{Tr}(M_2).$$

Доказательство. Произведение связностей $\tilde{\nabla}_1 \times \tilde{\nabla}_2$ имеет следующий геометрический смысл. Обозначим через $\pi_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ проекции на сомножители. Пусть $\gamma(t)$ – путь в $M_1 \times M_2$. Положим $\gamma^i = \pi_i \circ \gamma$, $i = 1, 2$. Параллельный перенос вдоль $\gamma([t_0, t_1])$ есть линейное отображение

$$\tau: (M_1 \times M_2)_{\gamma(t_0)} \longrightarrow (M_1 \times M_2)_{\gamma(t_1)}.$$

Пусть $\tau^i: (M_i)_{\gamma^i(t_0)} \longrightarrow (M_i)_{\gamma^i(t_1)}$ – параллельный перенос вдоль пути $\gamma^i([t_0, t_1])$ в M_i , $i = 1, 2$. Учитывая каноническое отождествление $(M_1 \times M_2)_{(x,y)} = (M_1)_x \dot{+} (M_2)_y$, имеем $\tau = \tau^1 \dot{+} \tau^2$.

Пусть теперь $\alpha \in \text{Tr}(M_1)$, $\beta \in \text{Tr}(M_2)$, и пусть $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$ – адаптированный репер в точке $(x, y) \in M_1 \times M_2$ (это означает, что $e_1, \dots, e_m \in (M_1)_x$, $e_{m+1}, \dots, e_{m+n} \in (M_2)_y$). Тогда

$$(\alpha \times \beta)_*(e_1, \dots, e_{m+n}) = (\alpha_*(e_1), \dots, \alpha_*(e_m), \beta_*(e_{m+1}), \dots, \beta_*(e_{m+n})).$$

Репер $(e_1, \dots, e_m)$ может быть преобразован в $\alpha_*(e_1, \dots, e_m)$ параллельным переносом в M_1 , а $(e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$ может быть преобразован в $\beta_*(e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$ параллельным переносом в M_2 . Синхронный параллельный перенос в $M_1 \times M_2$ преобразует $(e_1, \dots, e_{m+n})$ в $(\alpha \times \beta)_*(e_1, \dots, e_{m+n})$. Таким образом,

$$(\alpha \times \beta) \in \text{Tr}(M_1 \times M_2) \quad \text{и} \quad \text{Tr}(M_1) \times \text{Tr}(M_2) \subset \text{Tr}(M_1 \times M_2).$$

Сходными рассуждениями можно доказать, что $\text{Tr}(M_1) \times \text{Tr}(M_2)$ действует транзитивно на каждом расслоении голономии в $(M_1 \times M_2, \tilde{\nabla}_1 \times \tilde{\nabla}_2)$ (см. замечание I.26). Таким образом, наше пространство – аффинное редуктивное. Проведённое рассмотрение показывает, что $\text{Tr}(M_1) \times \text{Tr}(M_2) = \text{Tr}(M_1 \times M_2)$. $\square$

Следствие I.36. Пусть G_1, G_2 – связные группы Ли и $\tilde{\nabla}_1, \tilde{\nabla}_2$ – их канонические связности. Тогда $\tilde{\nabla}_1 \times \tilde{\nabla}_2$ – каноническая связность в $G_1 \times G_2$.

Доказательство. Согласно предложению I.34, группу трансвекций пространства $(G_i, \tilde{V}_i)$ можно отождествить с G_i , а группу трансвекций пространства $(G_1 \times G_2, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2)$ — с $G_1 \times G_2$. Пусть $\tilde{V}$ — каноническая связность произведения $G_1 \times G_2$. Тогда $G_1 \times G_2$ будет также группой трансвекций пространства $(G_1 \times G_2, \tilde{V})$. Так как действие группы $G_1 \times G_2$ на $G_1 \times G_2$ (слева) однотранзитивно, то параллелизмы относительно обеих связностей $\tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$ и $\tilde{V}$ определяются этим действием однозначно (и в действительности не зависят от пути). Следовательно, $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$. $\square$

Справедливо также обращение теоремы I.35:

Теорема I.37. Пусть $(M_1, \tilde{V}_1)$, $(M_2, \tilde{V}_2)$ — аффинные многообразия, такие что $(M_1, \tilde{V}_1) \times (M_2, \tilde{V}_2) = (M_1 \times M_2, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2)$ — аффинное редуктивное пространство. Тогда $(M_1, \tilde{V}_1)$, $(M_2, \tilde{V}_2)$ — аффинные редуктивные пространства.

Доказательство. При параллельном переносе адаптированного репера вдоль пути в $(M_1 \times M_2, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2)$ мы всегда получаем адаптированный репер, а именно

$$\tau(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+n}) = (\tau^1 e_1, \dots, \tau^1 e_m, \tau^2 e_{m+1}, \dots, \tau^2 e_{m+n}).$$

Таким образом, для каждого $\gamma \in \text{Tr}(M_1 \times M_2)$ образ адаптированного репера есть снова адаптированный репер. Это значит, что группа $\text{Tr}(M_1 \times M_2)$ сохраняет касательное M_1 -распределение и касательное M_2 -распределение; следовательно, она сохраняет семейства $\{M_1 \times \{y\}, y \in M_2\}$, $\{\{x\} \times M_2, x \in M_1\}$. Выберем точку $(x_0, y_0) \in M_1 \times M_2$ и отождествим M_1 с $M_1 \times \{y_0\}$, M_2 с $\{x_0\} \times M_2$. Положим

$$G_1 = \{ \gamma \in \text{Tr}(M_1 \times M_2) : \gamma(x_0, y_0) \in M_1 \},$$

$$G_2 = \{ \gamma \in \text{Tr}(M_1 \times M_2) : \gamma(x_0, y_0) \in M_2 \}.$$

Тогда G_i действует как транзитивная группа преобразований многообразия M_i , $i = 1, 2$. Ясно, что $\text{Tr}(M_1 \times M_2) = G_1 \times G_2$ и $G_i = \text{Tr}(M_i)$, $i = 1, 2$. Отсюда и следует наш результат. $\square$

Очевидно, в аффинном редуктивном пространстве $(M, \tilde{V})$ связность $\tilde{V}$ всегда полна и удовлетворяет соотношениям $\tilde{V}\tilde{K} = 0$, $\tilde{V}T = 0$. Более общо, имеет место

Предложение I.38. В аффинном редуктивном пространстве $(M, \tilde{V})$ тензорное поле параллельно, если и только если оно инвариантно относительно группы трансвекций $\text{Tr}(M)$.

Доказательство. Это легко следует из того факта, что $\text{Tr}(M)$ действует транзитивно на каждом расслоении голономии $P(u), u \in L(M)$. $\square$

Предложение I.39. Пусть $(M, \tilde{V})$ — связное односвязное аффинное редуктивное пространство, $\tilde{K}$ — поле его тензора кривизны и $o \in M$ — фиксированная точка. Тогда имеется биективное соответствие между параллельными тензорными полями типа (p, q) на M и тензорами типа (p, q) на $V = M_o$, которые аннулируются при действии дифференцирований $\tilde{K}(X, Y), X, Y \in V$, тензорной алгебры $\mathcal{L}(V)$. Это соответствие определяется значением тензорного поля в точке o .

Доказательство. Ясно, что группа голономии $\Psi(o)$ совпадает с суженной группой голономии $\Psi^o(o)$, значит, она связна. Тогда $\Psi(o)$ порождается линейными преобразованиями $\exp X, X \in \mathfrak{g}(o)$, где $\mathfrak{g}(o)$ — алгебра Ли, порождённая всеми эндоморфизмами $\tilde{K}(X, Y), X, Y \in M_o$ (см. B9). Далее, любой тензор в M_o есть значение параллельного тензорного поля на M , если и только если оно инвариантно относительно $\Psi(o)$. Отсюда и следует нужный результат. $\square$

Мы завершим эту главу следующим результатом (см. [KH2]¹, теор. 2.8).

Теорема I.40. Пусть $(M, \tilde{V})$ — связное односвязное многообразие с полной аффинной связностью, такое что $\tilde{V}R = 0, \tilde{V}\tilde{T} = 0$. Тогда $(M, \tilde{V})$ есть аффинное редуктивное пространство.

Доказательство. Пусть задано $u_o \in L(M)$. Обозначим через $P(u_o)$ соответствующее расслоение голономии. Для произвольного $u_p \in P(u_o)$ пусть γ — кусочно дифференцируемый путь из точки o в точку p , такой что u_p получается из u_o параллельным переносом $h_\gamma: M_o \rightarrow M_p$ вдоль пути γ . Так как $\tilde{K}$ и $\tilde{T}$ параллельны, то мы получаем отсюда $h_\gamma(\tilde{K}_o) = \tilde{K}_p, h_\gamma(\tilde{T}_o) = \tilde{T}_p$. Согласно B8, существует аффинное преобразование q на M , такое что q_{*o} совпадает с h_γ . С другой стороны, как легко видеть, $\tilde{q}$ сохраняет расслоение $P(u_o)$. Таким образом, $q \in \text{Tr}(M)$ и $\text{Tr}(M)$ транзитивна на $P(u_o)$. $\square$



Литература: [KH1, 2]¹, [K1], [K10], [KL], [Lo1], [Ше]¹, [N].

Глава II

Дифференцируемые s -многообразия

АФФИННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть M — дифференцируемое многообразие с аффинной связностью ∇ . Используя нормальные окрестности и экспоненциальные отображения, мы можем определить локальные геодезические симметрии тем же способом, что и в римановом случае.

Многообразие (M, ∇) называется аффинным локально-симметрическим, если для каждой точки $p \in M$ существует открытая окрестность N_p , такая что локальная геодезическая симметрия в N_p есть аффинное преобразование. Хорошо известно, что многообразие (M, ∇) локально-симметрическое, если и только если $T = 0$ и $\nabla R = 0$.

Далее, связное многообразие (M, ∇) называют аффинным (глобально-) симметрическим, если каждая точка $p \in M$ является изолированной неподвижной точкой некоторого инволютивного аффинного автоморфизма s_p многообразия (M, ∇) (при этом s_p называется симметрией в точке p). Очевидно, связное многообразие (M, ∇) — аффинное симметрическое тогда и только тогда, когда оно аффинное локально-симметрическое и для каждой точки $p \in M$ локальная геодезическая симметрия относительно точки p может быть продолжена до аффинного автоморфизма s_p многообразия (M, ∇) на себя. (Последнее условие всегда выполняется, если многообразие M связно и односвязно, а связность ∇ полна.)

В аффинном симметрическом пространстве (M, ∇) система симметрий $\{s_p\}_{p \in M}$ определяется однозначно, и для любых двух точек $x, y \in M$

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x, \quad \text{где } z = s_x(y)$$

(доказательство такое же, как и в римановом случае). Далее, отображение $(x, y) \mapsto s_x(y)$ дифференцируемо. Если мы определим дифференцируемое умножение в M формулой $x \cdot y = s_x(y)$, то получим

дистрибутивный группоид¹¹⁾ – объект, интенсивно изучаемый в современной алгебре.

Как заметил О. Лооз [Lo 1], алгебра этого дистрибутивного группоида полностью определяет геометрию аффинного симметрического пространства. Следуя Лоозу, определим симметрическое пространство как многообразие M с дифференцируемым умножением $\mu : M \times M \rightarrow M$, записываемым как $\mu(x, y) = x \cdot y$ и обладающим следующими свойствами:

- (1) $x \cdot x = x$;
- (2) $x \cdot (x \cdot y) = y$;
- (3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$;
- (4) каждая точка x имеет окрестность U , такую что $x \cdot y = y$ влечёт $y = x$ для всех y из U .¹²⁾

Для каждого $x \in M$ отображение $s_x : M \rightarrow M$, задаваемое формулой $s_x(y) = x \cdot y$, называется симметрией в точке x . Из (2) вытекает, что $(s_x)^2 = \text{id}$ для каждого x , и, следовательно, каждое s_x есть диффеоморфизм.

Главный результат о симметрических пространствах в смысле Лооза состоит в следующем:

Теорема II.1. Каждое симметрическое пространство (M, μ) допускает единственную аффинную связность ∇ , называемую канонической связностью, которая инвариантна относительно всех симметрий s_x . Связность ∇ полна и удовлетворяет условиям $T = 0$, $\nabla R = 0$. Кроме того, если M связно, то аффинное многообразие (M, ∇) есть обычное аффинное симметрическое пространство и симметрии s_x , $x \in M$, суть обычные геодезические симметрии.

Основная цель этой главы – охарактеризовать в таком же духе более широкий класс пространств, представляющих собой " s -регулярные аффинные многообразия" в смысле Леджера [GL 2]. На протяжении всей этой главы мы будем пользоваться методами Лооза ([Lo 1], [Lo 2]). Значительная часть этой теории была независимо получена А.С.Феденко и другими (см. [Ф1]' – [Ф3]').

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Прежде всего, аксиома (4) говорит нам, что неподвижная точка x симметрии s_x всегда изолирована. В предположении, что выполнены (1) и (2), аксиома (4) эквивалентна следующему утверждению:

- (4') нулевой вектор пространства $T_x(M)$ является единствен-

ным неподвижным вектором касательного отображения $(s_x)_{*x}: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$.

В самом деле, из аксиомы (2) следует, что для любой точки $x \in M$ существует риманова метрика g_x на многообразии M , инвариантная при действии s_x . Следовательно, s_x есть изометрия многообразия (M, g_x) . Применяя хорошо известную формулу $f \circ \exp = \exp \circ f_*$ в случае $f = s_x$, получаем желаемую эквивалентность.

Теперь мы можем ввести наше основное понятие:

Определение II.2. Регулярное s -многообразие — это многообразие M с дифференцируемым умножением $\mu: M \times M \rightarrow M$ (обозначаемым точкой), такое что отображения $s_x: M \rightarrow M$, $x \in M$, задаваемые правилом $s_x(y) = x \cdot y (= \mu(x, y))$, удовлетворяют следующим аксиомам:

(1) $s_x(x) = x$;

(2') каждое s_x есть диффеоморфизм;

(3) $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, где $z = s_x(y)$;

(4') для каждого $x \in M$ касательное отображение $(s_x)_{*x}: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ не имеет других неподвижных векторов, кроме нулевого.¹³⁾

Очевидно, условия (1), (3) имеют тот же смысл, что и выше, а (2') есть обобщение условия (2). Диффеоморфизмы s_x , $x \in M$, снова называются симметриями многообразия M .

Определение II.3. Автоморфизм многообразия (M, μ) — это такой диффеоморфизм $\Phi: M \rightarrow M$, что $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$ для любых $x, y \in M$.

В силу аксиом (3) и (2') все симметрии s_x многообразия (M, μ) являются автоморфизмами. Сейчас мы сформулируем основную теорему этой главы.

Теорема II.4. Пусть (M, μ) — связное регулярное s -многообразие с симметриями s_x , $x \in M$. Обозначим через S тензорное поле типа $(1, 1)$, задаваемое формулой $S_x = (s_x)_{*x}$ для всех $x \in M$.

(А) Существует единственная связность $\tilde{\nabla}$ на многообразии M (называемая канонической связностью), инвариантная относительно всех s_x и удовлетворяющая соотношению $\tilde{\nabla} S = 0$. Связность $\tilde{\nabla}$ полна и имеет параллельную кривизну и параллельное кручение.

(В) Группа $\text{Aut}(M)$ всех автоморфизмов многообразия (M, μ)

есть транзитивная группа Ли преобразований, являющаяся замкнутой подгруппой группы всех аффинных преобразований $A(M)$ относительно связности $\tilde{\nabla}$.

(C) Пусть G обозначает компоненту единицы в группе $A(M)$, o — фиксированная точка многообразия M и G_o — соответствующая группа изотропии. Тогда однородное пространство G/G_o редуکتивно (каноническим образом) и после стандартного отождествления $G/G_o \simeq M$ связность $\tilde{\nabla}$ совпадает с канонической связностью пространства G/G_o (см. [K7]).

Доказательство этой теоремы довольно длинное. Оно будет постепенно, шаг за шагом, проводиться в следующих параграфах.

КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Пусть (M, μ) — многообразие с умножением (никакие другие свойства, кроме дифференцируемости отображения $\mu : M \times M \rightarrow M$, не требуются). Пусть $x, y \in M$, $u \in T_x(M)$, $v \in T_y(M)$. Точка $\mu(x, y)$, как обычно, обозначается $x \cdot y$. Определим произведения $x \cdot v$ и $u \cdot y$, принадлежащие $T_{x \cdot y}(M)$, по правилу

$$x \cdot v = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (x \cdot \alpha(t)), \quad u \cdot y = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\beta(t) \cdot y), \quad (5)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — параметризованные кривые на многообразии M , такие что $\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_0 = v$, $\left. \frac{d\beta}{dt} \right|_0 = u$.

Лемма II.5. Пусть $\alpha, \beta : (-\ell, \ell) \rightarrow M$ — две параметризованные кривые в M , и пусть $\alpha \cdot \beta$ обозначает кривую, определяемую формулой $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$, $t \in (-\ell, \ell)$. Тогда

$$\left. \frac{d(\alpha \cdot \beta)}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_0 \cdot \beta(0) + \alpha(0) \cdot \left. \frac{d\beta}{dt} \right|_0.$$

Доказательство. См. "формулу Лейбница" ([КН1]', стр. 21). $\square$

В соответствии с определением II.3, автоморфизм многообразия (M, μ) — это диффеоморфизм $\Phi : M \rightarrow M$, такой что $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$, $x, y \in M$. Мы часто будем обозначать касательное отображение для Φ тем же символом Φ .

Лемма II.6. Пусть Φ — автоморфизм многообразия (M, μ) и $x \in M$, $u \in T_x(M)$. Тогда

$$\Phi(x \cdot u) = \Phi(x) \cdot \Phi(u), \quad \Phi(u \cdot x) = \Phi(u) \cdot \Phi(x). \quad (6)$$

Доказательство. Это очевидно. $\square$

Как обычно, $\mathfrak{X}(M)$ будет обозначать алгебру Ли всех дифференцируемых векторных полей на M . Элементы из $\mathfrak{X}(M)$ рассматриваются как сечения $M \longrightarrow T(M)$.

Определение II.7 (см. [LoI], стр. 51). Пусть (M, μ) — многообразие с умножением. Дифференцирование многообразия (M, μ) — это векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$, такое что

$$X(p \cdot q) = X(p) \cdot q + p \cdot X(q) \text{ для всех } p, q \in M.$$

Множество всех дифференцирований многообразия (M, μ) будет обозначаться $\text{Der}(M)$.

Предложение II.8. а) Дифференцирования многообразия (M, μ) образуют подалгебру Ли в алгебре Ли $\mathfrak{X}(M)$.

б) Однопараметрическая группа преобразований многообразия M является группой автоморфизмов, если и только если соответствующее векторное поле есть дифференцирование.

Доказательство. а) Это утверждение устанавливается прямым вычислением скобки Ли $[X, Y]$ в точке $p \cdot q$ (при этом следует воспользоваться очевидными соотношениями

$$(u \cdot x)(f) = u(f \circ R_x), (y \cdot v)(f) = v(f \circ L_y)$$

для $x, y \in M$, $u, v \in T(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$).

б) Пусть $\{\Phi_t\}$ — заданная однопараметрическая группа. Она является группой автоморфизмов, если и только если $\Phi_t(p \cdot q) = \Phi_t(p) \cdot \Phi_t(q)$. Наш результат вытекает теперь из леммы II.5, применённой к кривым $\alpha(t) = \Phi_t(p)$, $\beta(t) = \Phi_t(q)$. $\square$

В дальнейшем (M, μ) всегда будет обозначать регулярное s -многообразие. Как мы знаем, каждая симметрия s_x есть автоморфизм многообразия (M, μ) , равно как и обратное отображение s_x^{-1} . Для единообразия будем писать просто $x^{-1} \cdot y$ вместо $s_x^{-1}(y)$ ($x, y \in M$). ¹⁴⁾

Заметим, что ввиду формулы (5) мы имеем

$$(x \cdot u) = (s_x)_* u \text{ для каждого } x \in M, u \in T(M). \quad (7)$$

Лемма II.9. Пусть $p \in M$, $v \in T_p(M)$, $x, y \in M$. Тогда

$$v = p \cdot v + v \cdot p, \quad (8)$$

$$v \cdot (x \cdot y) = (v \cdot x) \cdot (p \cdot y) + (p \cdot x) \cdot (v \cdot y). \quad (9)$$

Доказательство. Выберем кривую $\gamma: (-\ell, \ell) \rightarrow M$, такую что $\gamma(0) = p$, $\frac{d\gamma(0)}{dt} = v$, и положим $\alpha(t) = \beta(t) = \gamma(t)$ для каждого t . Формула (8) получается из "формулы Лейбница" (лемма II.5) с учётом аксиомы $x \cdot x = x$. Далее, полагаем $\alpha(t) = \gamma(t) \cdot x$, $\beta(t) = \gamma(t) \cdot y$ для каждого t . Тогда $(\alpha \cdot \beta)(t) = \gamma(t) \cdot (x \cdot y)$, и, используя формулу Лейбница, получаем (9). $\square$

Рассмотрим теперь тензорное поле S на многообразии M , заданное формулой $S_x = (S_x)_{*x}$. Согласно аксиомам (2') и (4') из определения II.2, мы можем также построить тензорные поля S^{-1} , $I - S$, $(I - S)^{-1}$.

Напомним, что диффеоморфизм Φ многообразия M индуцирует автоморфизм $\tilde{\Phi}$ алгебры $\mathfrak{T}(M)$ всех глобальных тензорных полей на M (см. [КН]').

Предложение II.10. Если Φ — автоморфизм многообразия (M, μ) , то $\tilde{\Phi}$ сохраняет тензорные поля S , S^{-1} , $I - S$, $(I - S)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $p \in M$, $u \in T_p(M)$. Тогда

$$\Phi(S_p u) = \Phi(p \cdot u) = \Phi(p) \cdot \Phi(u) = S_{\Phi(p)} \Phi(u).$$

Значит, $\Phi \circ S_p = S_{\Phi(p)} \circ \Phi$ на $T_p(M)$, и $\tilde{\Phi}$ сохраняет тензорное поле S . Остальные случаи легко следуют отсюда. $\square$

Предложение II.11. Пусть v — произвольный касательный вектор в точке $p \in M$. Определим отображение $L(v): M \rightarrow T(M)$ по формуле

$$L(v)(x) = (I_p - S_p)^{-1} v \cdot (p^{-1} \cdot x), \quad x \in M. \quad (10)$$

Тогда $L(v)$ является дифференцированием многообразия (M, μ) и $L(v)(p) = v$. Отображение $L: T(M) \rightarrow \text{Der}(M)$ линейно и инъективно на каждом касательном пространстве $T_p(M)$.

Доказательство. Легко видеть, что $L(v)(x) \in T_x(M)$ для любого x , и, значит, $L(v) \in \mathfrak{X}(M)$. Используя формулу (9), получаем

$$\begin{aligned} L(v)(x \cdot y) &= (I_p - S_p)^{-1} v \cdot [p^{-1} \cdot (x \cdot y)] \\ &= (I_p - S_p)^{-1} v \cdot [(p^{-1} \cdot x)(p^{-1} \cdot y)] \\ &= [(I_p - S_p)^{-1} v \cdot (p^{-1} \cdot x)] \cdot [p \cdot (p^{-1} \cdot y)] \\ &\quad + [p \cdot (p^{-1} \cdot x)] \cdot [(I_p - S_p)^{-1} v \cdot (p^{-1} \cdot y)] \\ &= L(v)(x) \cdot y + x \cdot L(v)(y), \end{aligned}$$

что и доказывает первое утверждение. Далее, в силу формулы (8), имеем

$$\begin{aligned} L(v)(p) &= (I_p - S)^{-1} v \cdot (p^{-1}, p) \\ &= (I_p - S_p)^{-1} v \cdot p = (I_p - S_p)^{-1} v - p \cdot (I_p - S_p)^{-1} v \\ &= I_p (I_p - S_p)^{-1} v - S_p (I_p - S_p)^{-1} v = v. \end{aligned}$$

Последнее утверждение теперь очевидно. $\square$

Предложение II.12. Для каждого автоморфизма Φ многообразия (M, μ) мы имеем $\Phi_* \circ L = L \circ \Phi_*$ на $T(M)$, причём значения принадлежат $Der(M)$.

Доказательство. Выберем $p, x \in M, v \in T_p(M)$. Пользуясь формулой (6) и предложением II.10, получаем

$$\begin{aligned} L(\Phi_* v)(x) &= (I_{\Phi(p)} - S_{\Phi(p)})^{-1} (\Phi_* v) \cdot ([\Phi(p)]^{-1} \cdot x) \\ &= \Phi_* ((I_p - S_p)^{-1} v) \cdot ([\Phi(p)]^{-1} \cdot x) \\ &= \Phi_* ((I_p - S_p)^{-1} v) \cdot \Phi(p^{-1} \cdot \Phi^{-1}(x)) \\ &= \Phi_* [L(v)(\Phi^{-1}(x))] = (\Phi_* L(v))(x). \quad \square \end{aligned}$$

Предложение II.13. Формула

$$\tilde{\nabla}_v Y = [L(v), Y](p) \quad (p \in M, v \in T_p(M), Y \in \mathcal{X}(M)) \quad (11)$$

определяет аффинную связность $\tilde{\nabla}$ на M . Каждый автоморфизм многообразия (M, μ) является его аффинным преобразованием, и каждое дифференцирование многообразия (M, μ) есть его инфинитезимальное аффинное преобразование.

Доказательство. Очевидно, что введённая выше операция линейна по отношению к v и Y . Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_v (fY) &= [L(v), fY](p) \\ &= (L(v)(p))(f) \cdot Y(p) + f(p) \cdot [L(v), Y](p) \\ &= v(f) \cdot Y(p) + f(p) \cdot \tilde{\nabla}_v Y \end{aligned}$$

(здесь точки обозначают обычное умножение вещественных чисел на векторы).

Далее, пусть $\Phi \in \text{Aut}(M)$. Используя предложение II.12, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\Phi_*(v)} \Phi_*(Y) &= [L(\Phi_*(v)), \Phi_*Y](\Phi(p)) \\ &= (\Phi_*[L(v), Y])(\Phi(p)) = \Phi_*([L(v), Y](p)) = \Phi_*(\tilde{\nabla}_v Y)\end{aligned}$$

Наконец, пусть $X \in \text{Der}(M)$. Тогда X порождает локальную группу локальных автоморфизмов многообразия (M, μ) (простая модификация предложения II.8), а значит и локальную группу локальных аффинных преобразований многообразия (M, μ) . Следовательно, X есть инфинитезимальное аффинное преобразование. $\square$

Следствие II.14. Связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно всех s_x , $x \in M$.

Предложение II.15. $\tilde{\nabla} S = 0$.

Доказательство. Для $v \in T_p(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем $\tilde{\nabla}_v Y = (\mathcal{L}_{L(v)} Y)(p)$. Далее,

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_v S)(Y) &= \tilde{\nabla}_v(SY) - S(\tilde{\nabla}_v Y) \\ &= [\mathcal{L}_{L(v)} SY - S(\mathcal{L}_{L(v)} Y)](p) = [\mathcal{L}_{L(v)} S](Y)(p).\end{aligned}$$

С другой стороны, $L(v)$ — инфинитезимальный автоморфизм, и, согласно доказательству предложения II.10, S инвариантно относительно локальных автоморфизмов пространства (M, μ) . Следовательно, $\mathcal{L}_{L(v)} S = 0$, откуда и вытекает требуемое утверждение. $\square$

Предложение II.16 (формула Леджера). Пусть ∇ есть s_x -инвариантная связность на (M, μ) . Тогда

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (\nabla_{(1-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y) \quad (12)$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказательство. См. доказательство предложения 0.32. $\square$

Суммируем предложения II.14 — 16:

Теорема II.17. Для каждого регулярного s -многообразия (M, μ) (не обязательно связного) существует единственная связность $\tilde{\nabla}$, инвариантная относительно всех s_x и такая, что $\tilde{\nabla} S = 0$. Она задаётся формулой (11) предложения II.13.¹⁵⁾

Определение II.18. Связность $\tilde{\nabla}$, задаваемую формулой (11), будем называть канонической связностью многообразия (M, μ) .

Соглашение II.19. В дальнейшем мы будем использовать для обозначения регулярного s -многообразия (M, μ) также символ $(M, \{s_x\})$.

РЕГУЛЯРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ s -МНОГООБРАЗИЯ

Начиная с этого момента, мы будем предполагать многообразие M связным. Обозначим через $A(M)$ группу Ли всех аффинных преобразований многообразия M относительно связности $\tilde{\nabla}$.

Предложение II.20. Преобразование $\Phi \in A(M)$ является автоморфизмом многообразия $(M, \{s_x\})$, если и только если оно сохраняет тензорное поле S . Следовательно, $\text{Aut}(M)$ — замкнутая подгруппа группы $A(M)$, а значит и группа Ли преобразований многообразия M .

Доказательство. Φ сохраняет тензорное поле S , если и только если для каждого $x \in M$ отображения $\Phi \circ s_x$ и $s_{\Phi(x)} \circ \Phi$ обладают одним и тем же касательным отображением в точке x . Далее, Φ является автоморфизмом, если и только если для каждого x отображения $\Phi \circ s_x$ и $s_{\Phi(x)} \circ \Phi$ совпадают. Так как $\Phi \circ s_x$ и $s_{\Phi(x)} \circ \Phi$ суть аффинные преобразования, то оба условия эквивалентны друг другу. $\square$

Предложение II.21. Группа Ли преобразований $\text{Aut}(M)$ действует на M транзитивно.

Доказательство (см. [L0].) Выберем начало $o \in M$, и пусть $K \subset \text{Aut}(M)$ — группа преобразований многообразия M , порождённая (алгебраически) всеми симметриями s_x , $x \in M$. Мы докажем, что орбита $K^{(o)}$ точки o относительно группы K есть открытое подмногообразие в M и, значит, $K^{(o)} = M$.

Рассмотрим отображение $\lambda(x) = s_x(p) = x \cdot p$, где p принадлежит $K^{(o)}$, а x пробегает всё M . Имеем $\lambda(p) = p$. Для $v \in T_p(M)$ получаем $\lambda_{*p}(v) = v \cdot p = v - p \cdot v = (I_p - S_p)v$ (см. формулу (8)). Отсюда следует, что $\lambda_{*p} = I_p - S_p$ является неособым преобразованием и λ диффеоморфно отображает некоторую окрестность U точки p на некоторую окрестность V точки p . Мы заключаем, что $V \subset K^{(o)}$, и орбита $K^{(o)}$ открыта. Объединение всех других орбит группы K также должно быть открытым, так что $K^{(o)}$ и замкнута. Следовательно, $K^{(o)} = M$. $\square$

Напомним хорошо известную лемму Фиттинга (см. [J], гл. 2).

Лемма II.22. Пусть W — конечномерное векторное пространство

и $A: W \rightarrow W$ — его эндоморфизм. Имеется единственное разложение $W = W_{0A} \dot{+} W_{1A}$ пространства W на A -инвариантные подпространства (называемые 0-компонентой и 1-компонентой Фиттинга соответственно), такие что сужение A на W_{0A} нильпотентно, а сужение A на W_{1A} есть автоморфизм. Далее,

$$W_{1A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A^i(W), \quad W_{0A} = \{v; A^i(v)=0 \text{ для некоторого } i\}. \quad (13)$$

Приводимое ниже определение принадлежит Н.А.Степанову [Ст2]'.

Определение II.23. Регулярное однородное s -многообразие — это тройка (G, H, σ) , где G — связная группа Ли, H — её замкнутая подгруппа и σ — автоморфизм группы G , такие что удовлетворяются следующие две аксиомы:

(i) $(G^\sigma)^\circ \subset H \subset G^\sigma$, где $G^\sigma = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$, $(G^\sigma)^\circ$ — компонента единицы группы G^σ ;

(ii) если σ_* обозначает индуцированный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , а A обозначает линейный эндоморфизм $\text{id} - \sigma_*$, то $\mathfrak{g}_{0A} = \mathfrak{h}$ (алгебре Ли группы H).

Предложение II.24. Если (G, H, σ) — регулярное однородное s -многообразие, то

(a) $\mathfrak{h} = \ker A$, $\mathfrak{g}_{1A} = \text{im } A$;

(b) однородное пространство G/H редуکتивно относительно разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{1A}$.

Доказательство. (a) следует из соотношений $\sigma_*|_{\mathfrak{h}} = \text{id}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{0A}$ и леммы II.22. Далее, так как $H \subset G^\sigma$, то $\text{ad}(h) \circ \sigma_* = \sigma_* \circ \text{ad}(h)$ для каждого $h \in H$. Следовательно, $\text{ad}(h)$ коммутирует с A на $\mathfrak{g}$ и

$$\text{ad}(h)(\mathfrak{g}_{1A}) = (\text{ad}(h) \circ A)(\mathfrak{g}) = A(\text{ad}(h)\mathfrak{g}) = A(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{1A}. \quad \square$$

Значительная часть следующей теоремы принадлежит Степанову и Феденко (см. [Ф1]', [Ф3]', [Ст2]').

Теорема II.25. I. Пусть (G, H, σ) — регулярное однородное s -многообразие, $\pi: G \rightarrow G/H$ — каноническая проекция, а s — преобразование пространства G/H , индуцированное автоморфизмом σ (т.е. $s \circ \pi = \pi \circ \sigma$ на G).

Пусть G действует на G/H левыми сдвигами. Тогда, полагая

$$s \pi(g) = g \circ s \circ g^{-1} \quad \text{для каждого } g \in G, \quad (14)$$

мы получаем корректно определённое семейство $\{s_x\}_{x \in G/H}$ диффеоморфизмов пространства G/H . При этом $(G/H, \{s_x\})$ есть связное регулярное s -многообразие и G действует на нём как группа автоморфизмов.

II. Обратно, пусть $(M, \{s_x\})$ — регулярное s -многообразие и $o \in M$ — фиксированная точка. Пусть G — компонента единицы группы автоморфизмов $\text{Aut}(M)$, а G_o — подгруппа изотропии группы G в точке o . Определим отображение $\phi: G \rightarrow \text{Aut}(M)$ формулой

$$\phi(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}, \quad g \in G. \quad (15)$$

Тогда ϕ есть автоморфизм группы G и (G, G_o, ϕ) есть регулярное однородное s -многообразие. При этом $M \simeq G/G_o$ и симметрии s_x задаются формулой (14), где $s = s_o$.

III. Наконец, в обоих случаях (I и II) каноническая связность регулярного s -многообразия совпадает с канонической связностью соответствующего редуктивного однородного пространства.

Доказательство. I. отождествим элементы группы G с соответствующими преобразованиями многообразия $M = G/H$ (здесь нет необходимости считать действие G эффективным). Выберем $g \in G$ и $x \in M$. Тогда $x = \pi(g')$ для некоторого $g' \in G$. Далее,

$$\begin{aligned} (s \circ g \circ s^{-1})(x) &= (s \circ g \circ s^{-1} \circ \pi)(g') = (s \circ g \circ \pi)(\phi^{-1}(g')) \\ &= (s \circ \pi)[g \phi^{-1}(g')] = (\pi \circ \phi)(g \circ \phi^{-1}(g')) = \pi(\phi(g)g') \\ &= \phi(g)[\pi(g')] = \phi(g)(x), \end{aligned}$$

откуда

$$s \circ g \circ s^{-1} = \phi(g) \text{ для каждого } g \in G. \quad (16)$$

В частности, для $h \in H$ мы получаем $s \circ h \circ s^{-1} = h$, и поэтому $h \circ s \circ h^{-1} = s$. Следовательно, преобразование $g \circ s \circ g^{-1}$ зависит только от $\pi(g)$ и формула (14) определяет семейство $\{s_x\}_{x \in M}$ диффеоморфизмов многообразия M .

Используя локальные сечения расслоения $\pi: G \rightarrow M$, легко видеть, что отображение $(x, y) \mapsto s_x(y)$ дифференцируемо. Далее, для $x \in M$, $x = \pi(g)$ имеем $x = g(o)$ (где o — начало) и, значит, $s_x(x) = (g \circ s \circ g^{-1})(x) = x$, потому что $s(o) = o$. Для $x, y \in M$ положим $s_x = g \circ s \circ g^{-1}$, $s_y = g' \circ s \circ (g')^{-1}$, где

$x = g(o)$, а $y = g'(o)$. Тогда

$$(g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s^{-1})(o) = s_x(g'(o)) = s_x(y);$$

с другой стороны, (16) даёт $g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s^{-1} = g \circ (g^{-1} g')$. Итак, отображение $g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s^{-1}$ совпадает с действием некоторого элемента $g'' \in G$, $g''(o) = s_x(y)$. Теперь,

$$s_x \circ s_y = g \circ s \circ g^{-1} \circ g' \circ s \circ (g')^{-1} = g'' \circ s \circ (g'')^{-1} \circ g \circ s \circ g^{-1} = s_{(s_x y)} \circ s_x.$$

Остаётся доказать свойство (4'). Очевидно, если мы отождествим g с $T_e(G)$, то проекция $\pi_{*e} : T_e(G) \rightarrow T_o(M)$ индуцирует изоморфизм g_{1A} на $T_o(M)$ (предложение II.24). Из соотношения $\pi_* \circ \beta_* = s_* \circ \pi_*$ вытекает, что $\pi_* \circ A = (I_o - s_{*o}) \circ \pi_*$. Так как A — автоморфизм подпространства g_{1A} , то $I_o - s_{*o}$ — автоморфизм пространства $T_o(M)$. Из (14) мы легко получаем, что $I_p - S_p$ есть автоморфизм на $T_p(M)$ для каждого $p \in M$. Таким образом, $(M, \{s_x\})$ — регулярное s -многообразие.

Наконец, пусть заданы $g \in G$ и $x \in M$. Мы можем положить $x = g'(o)$ для некоторого $g' \in G$. Тогда

$$g \circ s_x = g \circ g' \circ s \circ (g')^{-1} = (g \circ g') \circ s \circ (g \circ g')^{-1} \circ g = s_{g(x)} \circ g.$$

Отсюда видно, что g есть автоморфизм многообразия $(M, \{s_x\})$. Это завершает доказательство утверждения I.

II. Пусть заданы $(M, \{s_x\})$ и фиксированная точка $o \in M$. Так как группа $\text{Aut}(M)$ транзитивна на M и M связно, то G также транзитивна на M . Очевидно, отображение β , задаваемое формулой (15), является изоморфизмом группы G в группу $\text{Aut}(M)$, а так как G связна, то $\beta(G) = G$.

Группа изотропии G_o замкнута в G и $M \simeq G/G_o$. Пусть $\pi : G \rightarrow M$ — каноническая проекция. Для любого $g \in G$ имеем

$$(\pi \circ \beta)(g) = \beta(g)(o) = (s_o \circ g \circ s_o^{-1})(o) = s_o(g(o)) = (s_o \circ \pi)(g).$$

Следовательно,

$$\pi \circ \beta = s_o \circ \pi \quad \text{на } G \quad (17)$$

Вспомним теперь, что для каждого автоморфизма $g \in G$ справедливо равенство $g \circ s_x = s_{g(x)} \circ g$. В частности, для каждого $h \in G_o$ мы имеем $\beta(h) = s_o \circ h \circ s_o^{-1} = s_{h(o)} \circ h \circ s_o^{-1} = h$, т.е. $G_o \subset G^\beta$.

Пусть g, g_o, g^β обозначают алгебры Ли групп G, G_o, G^β соответственно. Отождествляя g с $T_e(G)$, мы получим касательное

отображение $\pi_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_0(M)$. Согласно (17), $\pi_* \circ \mathfrak{b}_* = S_0 \circ \pi_*$ на $\mathfrak{g}$, откуда

$$\pi_* \circ A = (I_0 - S_0) \circ \pi_* \text{ на } \mathfrak{g}, \text{ где } A = \text{id} - \mathfrak{b}_*. \quad (18)$$

Рассмотрим разложение Фиттинга $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{0A} + \mathfrak{g}_{1A}$. Ясно, что $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}^\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{0A}$. Предположим, что существует вектор $X \in \mathfrak{g}_{0A}$, $X \notin \mathfrak{g}_0$. Тогда $X' = \pi_*(X)$ — ненулевой вектор из $T_0(M)$. С другой стороны, $A^i(X) = 0$ для некоторого i , и из (18) мы получаем $(I_0 - S_0)^i X' = 0$ для некоторого i . Так как $I_0 - S_0$ обратимо (свойство (4')), то $X' = 0$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, $\mathfrak{g}_{0A} \subset \mathfrak{g}_0$, и, следовательно, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_{0A}$. Отсюда следуют (i) и (ii) из определения II.23.

Наконец, поскольку $q \in G$ — автоморфизм пространства $(M, \{s_x\})$, то мы имеем, в частности, $s_{\pi(q)} = s_{q(0)} = q \circ s_0 \circ q^{-1}$, и (17) означает, что $s_0 = s$. Итак, симметрии $\{s_x\}$ выражаются посредством соотношения (14).

III. Мы начнём со следующего утверждения:

Предложение II.26. Если $(G, H, \mathfrak{b})$ — регулярное однородное s -многообразие, то каноническая связность $\tilde{\nabla}$ редуктивного однородного пространства $G/H = M$ инвариантна относительно всех преобразований s_x , задаваемых формулой (14).

Доказательство. Поскольку G действует на $(M, \tilde{\nabla})$ как группа аффинных преобразований, то достаточно доказать, что s является аффинным преобразованием. Рассмотрим разложение Фиттинга $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{1A}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{0A}$. Здесь $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ инвариантны относительно $A = \text{id} - \mathfrak{b}_*$ и, значит, инвариантны относительно автоморфизма $\mathfrak{b}_*$. Пусть $\{Q_u\}$ — горизонтальное распределение канонической связности в $L(M)$. Согласно I.6, имеем $Q_u = \mathfrak{m} \cdot u$ для каждого $u \in \tilde{\pi}^{-1}(0)$ и $Q_{q \cdot u} = q_*(Q_u)$ для всех $u \in L(M)$ и $q \in G$ (здесь G действует на $L(M)$ естественным образом). Мы покажем, что $\{Q_u\}$ является $\tilde{S}$ -инвариантным, где $\tilde{S} : L(M) \rightarrow L(M)$ индуцировано преобразованием s (см. I.21).

Прежде всего, легко видеть, что $s(q \cdot x) = \mathfrak{b}(q) \cdot s(x)$ для $q \in G$, $x \in M$. Отсюда мы выводим, что $s_*(q \cdot X) = \mathfrak{b}(q) \cdot s_*(X)$ для $X \in T(M)$, а значит, $\tilde{S}(q \cdot u) = \mathfrak{b}(q) \cdot \tilde{S}(u)$ для $u \in L(M)$. Далее, получаем $\tilde{S}_*(X \cdot u) = \mathfrak{b}_*(X) \cdot \tilde{S}(u)$ для $X \in \mathfrak{g}$, $u \in L(M)$. Теперь, для $u \in \tilde{\pi}^{-1}(0)$ имеем $\tilde{S}(u) \in \tilde{\pi}^{-1}(0)$ и

$$\tilde{S}(Q_u) = \tilde{S}_*(\mathfrak{m} \cdot u) = \mathfrak{b}_*(\mathfrak{m}) \cdot \tilde{S}(u) = \mathfrak{m} \cdot \tilde{S}(u) = Q_{\tilde{S}(u)}.$$

Для произвольного $u \in L(M)$ имеем $u = g \cdot u_0$, где $u_0 \in \tilde{\pi}^{-1}(0)$ и

$$\begin{aligned}\tilde{s}_*(Q_u) &= \tilde{s}_*(g_*(Q_{u_0})) = \sigma(g)_*(\tilde{s}_*(Q_{u_0})) \\ &= \sigma(g)_*(Q_{\tilde{s}(u_0)}) = Q_{\sigma(g) \cdot \tilde{s}(u_0)} = Q_{\tilde{s}(g \cdot u_0)} = Q_{\tilde{s}(u)}. \quad \square\end{aligned}$$

Продолжим доказательство утверждения III. Группа G действует как группа автоморфизмов соответствующего регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$, поэтому S G -инвариантно. Следовательно, S параллельно относительно $\tilde{V}$ (см. II.20, I.44). Согласно части теоремы II.17, касающейся единственности, наша связность совпадает со связностью, задаваемой по формуле (44). Это завершает доказательство. $\square$

Следствие II.27. Каноническая связность $\tilde{V}$ связного регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$ всегда полна и удовлетворяет соотношениям $\tilde{V}\tilde{R} = \tilde{V}\tilde{T} = 0$. Пространство $(M, \tilde{V})$ есть аффинное редуктивное пространство.

II.28. Тем самым мы завершили и доказательство теоремы II.4.

* * *

В заключение этого параграфа выясним структуру алгебры Ли $\text{Der}(M)$ связного регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$.

Предложение II.29. Каждое дифференцирование пространства $(M, \{s_x\})$ полно и, значит, определяет однопараметрическую группу автоморфизмов пространства $(M, \{s_x\})$. Следовательно, алгебра $\text{Der}(M)$ есть алгебра Ли группы $\text{Aut}(M)$.

Доказательство. Хорошо известно, что каждое инфинитезимальное аффинное преобразование относительно полной связности является полным ($[КН]$). $\square$

Предложение II.30. Сопоставим каждому вектору $A \in \mathfrak{g}$ векторное поле $A^* \in \mathfrak{X}(M)$, задаваемое формулой $A^*(x) = A \cdot x$, $x \in M$. Тогда отображение $A \mapsto -A^*$ является изоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на алгебру Ли $\text{Der}(M)$.

Доказательство. Прежде всего, G является компонентой единицы группы $\text{Aut}(M)$, и, значит, алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре $\text{Der}(M)$. Как хорошо известно, соответствие $A \mapsto -A^*$ есть гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру $\mathfrak{X}(M)$. Далее, группа G действует эффективно на M , и, следовательно, рассматриваемое отображение есть инъекция. Наконец, каждое векторное поле A^* порождает однопараметрическую подгруппу $\{\exp tA\}$ группы $\text{Aut}(M)$, и, значит, $A^* \in \text{Der}(M)$. Отсюда следует наш результат. $\square$

Предложение II.31. Пусть $G_0 \subset G$ — подгруппа изотропии группы G в точке $o \in M$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{g}_0$ — соответствующее разложение Фиттинга алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда для $X \in \mathfrak{m}$ мы имеем $X^* = L(X \cdot o)$, где дифференцирование $L(v)$, $v \in T(M)$, определяется формулой (10) из предложения II.11.

Доказательство. В силу (11) имеем $\tilde{V}_{X \cdot o} Y = [L(X \cdot o), Y](o)$ для каждого $Y \in \mathfrak{X}(M)$ и, согласно (1) из I.10, $\tilde{V}_{X \cdot o} Y = [X^*, Y](o)$. Отсюда следует, что $[X^* - L(X \cdot o), Y](o) = 0$ для каждого $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Так как $X^* - L(X \cdot o) \in \text{Der}(M)$, то мы легко получаем, что $X^* - L(X \cdot o) = 0$. $\square$

ГРУППА ТРАНСВЕКЦИЙ

Определим элементарные трансвекции регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$ как автоморфизмы вида $s_x \circ s_y^{-1}$, $x, y \in M$. Группу, порождённую элементарными трансвекциями, будем обозначать $\text{Tr}(M, \{s_x\})$ и называть группой трансвекций многообразия $(M, \{s_x\})$.

Теорема II.32. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие и $\tilde{V}$ — его каноническая связность. Тогда группа трансвекций $\text{Tr}(M, \{s_x\})$ совпадает с группой трансвекций $\text{Tr}(M)$ аффинного редуктивного пространства $(M, \tilde{V})$. Далее, $\text{Tr}(M)$ есть нормальная подгруппа группы $\text{Aut}(M)$.

Доказательство. Как обычно, G будет обозначать компоненту единицы группы $\text{Aut}(M)$, а G_p — подгруппу изотропии группы G в точке $p \in M$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_p + \mathfrak{g}_p$ — разложение Фиттинга алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\text{id} - \mathcal{C}_{p*}$, где $\mathcal{C}_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_p \circ \mathfrak{g} \circ s_p^{-1}$, $\mathfrak{g} \in G$. Согласно предложению II.24, G/G_p редуктивно относительно этого разложения, и по теореме II.23 группа $\text{Tr}(M)$ совпадает с группой L , порождённой идеалом $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}_p + [\mathfrak{m}_p, \mathfrak{m}_p]$ алгебры $\mathfrak{g}$. Заметим, что $\mathfrak{m}_p$ инвариантно относительно $\mathcal{C}_{p*}$; то же верно и для идеала $\mathfrak{I}$. Следовательно, группа L инвариантна относительно $\mathcal{C}_p$.

Достаточно показать, что группа $\text{Tr}(M, \{s_x\})$ является нормальной подгруппой в группе $\text{Aut}(M)$ и что она совпадает с группой L . Для упрощения записи положим $K = \text{Tr}(M, \{s_x\})$.

Предложение II.33. Группа K транзитивна на M .

Доказательство. Достаточно заметить, что в доказательстве предложения II.21 отображение $\lambda(x) = s_x(p)$ можно записать в виде $\lambda(x) = (s_x \circ s_p^{-1})(p)$. $\square$

Лемма II.34. Каждый элемент группы K можно соединить в G

с единицей $e \in G$ кусочно-дифференцируемой кривой, содержащейся в K .

Доказательство. (см. [LoI]). Выберем какое-нибудь начало $p \in M$ и положим $X \in \mathfrak{M}_p$. Кривая $x_t = (\exp tX)(p)$ является геодезической в $(M, \tilde{V})$, согласно лемме I.25. Далее, $x_t = \text{Exp}_p(tv)$, где $v = X \cdot p \in T_p(M)$, а Exp_p обозначает экспоненциальное отображение в точке $p \in M$ относительно связности $\tilde{V}$. Отсюда мы легко получаем, что

$$\begin{aligned} s_{\text{Exp}_p(tv)} \circ s_p^{-1} &= \exp(tX) \circ s_p \circ \exp(-tX) \circ s_p^{-1} \\ &= \exp(tX) \circ \mathfrak{b}_p \circ (\exp(-tX)) = \exp(tX) \circ \exp(-t\mathfrak{b}_{p*}(X)). \end{aligned}$$

Здесь отображение $X \mapsto v$ есть изоморфизм пространства $\mathfrak{M}_p$ на $T_p(M)$. Таким образом, каждое преобразование вида $s_y \circ s_p^{-1}$, где y принадлежит некоторой нормальной окрестности точки p , может быть соединено в G с единицей e гладкой дугой, лежащей в K . Отсюда и следует наш результат. $\square$

Предложение II.35. Группа K является связной нормальной подгруппой в группе $\text{Aut}(M)$.

Доказательство. Согласно теореме Ямабэ (Yamabe) (см., например, [КН]'), прил. 4), группа K есть связная подгруппа Ли группы G . Далее, для каждого автоморфизма Φ мы имеем

$$\Phi \circ s_x \circ s_y^{-1} \circ \Phi^{-1} = s_{\Phi(x)} \circ s_{\Phi(y)}^{-1} \in K.$$

Отсюда следует, что группа K является нормальной подгруппой группы $\text{Aut}(M)$. $\square$

Предложение II.36. $K \subset L$.

Доказательство. Группа L транзитивна на M . Значит, для любых двух точек $p, x \in M$ существует $q \in L$, такое что $q(p) = x$. Тогда

$$s_x \circ s_p^{-1} = q \circ s_p \circ q^{-1} \circ s_p^{-1} = q \circ [\mathfrak{b}_p(q)]^{-1} \in L$$

Так как группа K порождается всевозможными преобразованиями вида $s_x \circ s_p^{-1}$, мы и получаем требуемое включение. $\square$

Предложение II.37. $L \subset K$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{k}$ - алгебра Ли группы K . По предложению II.35 эта алгебра $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ инвариантна относительно каждого $\mathfrak{b}_{p*}$ где $\mathfrak{b}_p: q \mapsto s_p \circ q \circ s_p^{-1}$. Рассмотрим разложение Фиттинга для $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{g}$ относительно $A = \text{id} - \mathfrak{b}_{p*}$:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{0A} + \mathfrak{f}_{1A}, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{0A} + \mathfrak{g}_{1A}, \text{ где } \mathfrak{g}_{1A} = \mathfrak{m}_p, \mathfrak{g}_{0A} = \mathfrak{g}_p.$$

Очевидно,

$$\mathfrak{f}_{0A} \subset \mathfrak{g}_{0A}, \mathfrak{f}_{1A} = \bigcap_i A^i(\mathfrak{f}) \subset \bigcap_i A^i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{1A}.$$

Поскольку группа K транзитивна на M , соответствие $X \mapsto X \cdot p, X \in \mathfrak{f}$, есть проекция $\mathfrak{f}$ на $T_p(M)$, а так как $\mathfrak{f}_{0A} \subset \mathfrak{g}_p$, то $\mathfrak{f}_{1A}$ отображается на $T_p(M)$. Так как $\mathfrak{f}_{1A} \subset \mathfrak{m}_p$ и $\mathfrak{m}_p$ изоморфно $T_p(M)$, мы имеем $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{f}_{1A} \subset \mathfrak{f}$ и, тем самым, $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$. Отсюда вытекает наш результат. $\square$

Этим завершается также доказательство теоремы II.32. $\square \square$

В теореме I.33 мы установили биективное соответствие между аффинными редуктивными пространствами и редуктивными однородными пространствами. Сейчас мы модифицируем нашу теорему II.25 так, чтобы получить биективное соответствие между регулярными s -многообразиями и регулярными однородными s -многообразиями.

Предложение II.38. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие, а $o \in M$ — фиксированная точка. Рассмотрим группу Ли автоморфизмов $\mathfrak{b} : \text{Aut}(M) \rightarrow \text{Aut}(M)$ вида $\mathfrak{b}(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$. Для каждой связной $\mathfrak{b}$ -инвариантной подгруппы $K \subset \text{Aut}(M)$, действующей на M транзитивно, и для её подгруппы изотропии K_o в точке o тройка $(K, K_o, \mathfrak{b}|_K)$ есть регулярное однородное s -многообразие. Каноническая связность редуктивного пространства K/K_o совпадает с канонической связностью s -многообразия $(M, \{s_x\})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{f}$ — алгебра Ли группы K , а $\mathfrak{f}_o$ — алгебра Ли группы K_o . Пусть G и G_o обозначают, как и прежде, компоненты единицы в $\text{Aut}(M)$ и подгруппу изотропии группы G в точке o соответственно. Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_o$ — соответствующие алгебры Ли. Наконец, введём обозначения

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}|_K, A = \text{id} - \mathfrak{b}_*, B = \text{id}|_{\mathfrak{f}} - \mathfrak{b}'_*,$$

так что $B = A|_{\mathfrak{f}}$.

Соотношение $(K^{\mathfrak{b}'})^o \subset K_o \subset K^{\mathfrak{b}'}$ тривиально следует из соотношения $(G^{\mathfrak{b}})^o \subset G_o \subset G^{\mathfrak{b}}$. Далее, для компонент Фиттинга мы легко по-

лучаем

$$\mathcal{F}_{0B} = \mathcal{G}_{0A} \cap \mathcal{F} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{F}_{1B} = \bigcap_i B^i(\mathcal{F}) \subset \bigcap_i A^i(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_{1A}.$$

Поэтому (K, K_0, σ') есть регулярное однородное s -многообразие. Далее, $K/K_0 \simeq M$, потому что K действует транзитивно на M ; отсюда следует, что $\dim(\mathcal{F}_{1B}) = \dim M = \dim(\mathcal{G}_{1A})$. Итак, $\mathcal{F}_{1B} = \mathcal{G}_{1A} = \mathcal{H}$, в обычных обозначениях. Из конструкции канонической связности (гл. I) легко видно, что канонические связности пространств G/G_0 и K/K_0 совпадают на M . $\square$

Предложение II.39. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие, $o \in M$ — фиксированная точка, и пусть $\sigma: \text{Aut}(M) \rightarrow \text{Aut}(M)$ задаётся формулой $\sigma(q) = s_o \circ q \circ s_o^{-1}$. Тогда группа $\text{Tr}(M)$ есть наименьшая σ -инвариантная подгруппа группы $\text{Aut}(M)$, действующая на M транзитивно.

Доказательство. $\text{Tr}(M)$ является σ -инвариантной, так как она нормальна в $\text{Aut}(M)$. Далее, если подгруппа $K \subset \text{Aut}(M)$ инвариантна и транзитивна на M , то $(M, \tilde{V})$ описывается редуктивным однородным пространством K/K_0 (см. предложение II.38). Согласно теореме I.25, группа $\text{Tr}(M)$ есть нормальная подгруппа Ли в K . $\square$

Говорят, что регулярное однородное s -многообразие (G, H, σ) примарно, если G/H примарно как редуктивное однородное пространство (см. теорему I.33).

Теорема II.40. Имеется взаимно-однозначное соответствие между пунктированными связными регулярными s -многообразиями $(M, \{s_x\}, o)$ и примарными регулярными однородными s -многообразиями (G, H, σ) . Это соответствие задаётся в одну сторону соотношениями $G = \text{Tr}(M)$, $H = G_0$ и (15), а в другую — соотношениями $M = G/H$ и (14).

Доказательство. Это следует из теорем I.33, II.35 и предложений II.38, II.39. $\square$

Как нам известно, каноническая связность $\tilde{V}$ регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$ всегда удовлетворяет условиям $\tilde{V}\tilde{T} = 0$, $\tilde{V}\tilde{K} = 0$. Если $\tilde{T} = 0$, то пространство $(M, \tilde{V})$ будет аффинным локально-симметрическим. Условие $\tilde{K} = 0$ более интересно:

Теорема II.41. Пусть $(M, \{s_x\})$ — регулярное s -многообразие и $\tilde{V}$ — его каноническая связность. Если M связно, а $\tilde{K} = 0$, то группа трансвекций $\text{Tr}(M, \{s_x\})$ разрешима и является накрывающим многообразием для M .

Доказательство. Согласно теореме II.32, группа $\text{Tr}(M, \{s_x\})$ совпадает с группой трансвекций $K = \text{Tr}(M)$. Выберем и зафиксируем какую-нибудь точку $o \in M$. Согласно теореме II.40, мы получаем регулярное однородное s -многообразие (K, K_o, ϕ) ; здесь $\phi(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ на K и $K/K_o \cong M$. Имеет место разложение $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_o + \mathfrak{m}$, $\dim \mathfrak{m} = \dim M$. Так как K/K_o примарно, то $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_o$. В силу формулы (3) из I.13, $\tilde{K} = 0$ влечёт $[[X, Y]_{\mathfrak{K}_o}, Z]_{\mathfrak{K}_o} = 0$ для $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, так что $[\mathfrak{K}_o, \mathfrak{m}] = 0$.

Далее, K действует на M эффективно и, согласно предложению I.2, линейное представление изотропии группы K_o в $T_o(M)$ будет точным. Значит, присоединённое представление алгебры $\mathfrak{K}_o$ в $\mathfrak{m}$ тоже будет точным и $[\mathfrak{K}_o, \mathfrak{m}] = 0$ влечёт $\mathfrak{K}_o = 0$. Значит, K_o — дискретная подгруппа в K , и мы заключаем, что K есть накрывающее пространство для M . Наконец, автоморфизм ϕ индуцирует автоморфизм α_* алгебры Ли $\mathfrak{K} = \mathfrak{m}$, не имеющий ненулевых неподвижных векторов. Согласно лемме 0.22, алгебра $\mathfrak{K}$ разрешима, и группа K тоже тогда разрешима, поскольку она связна. $\square$

Следствие II.42. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное односвязное регулярное s -многообразие, такое что $\tilde{K} = 0$. Тогда M диффеоморфно разрешимой группе Ли и гомеоморфно евклидову пространству.

Доказательство. Согласно теореме II.41, M диффеоморфно связной односвязной разрешимой группе Ли. Но всякая такая группа гомеоморфна евклидову пространству (см., например, [Ли]). $\square$

s -МНОГООБРАЗИЯ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Определение II.43. Пусть k — целое число ≥ 2 . Говорят, что регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ имеет порядок k , если $(s_x)^k = \text{id}$ для всех $x \in M$ и k есть наименьшее целое число, обладающее таким свойством. Говорят, что регулярное однородное s -многообразие (G, H, ϕ) имеет порядок k , если $\phi^k = \text{id}$ и k есть наименьшее целое число, обладающее таким свойством.

Очевидно, что в теоремах II.25 и II.40 регулярным s -многообразиям порядка k соответствуют регулярные однородные s -многообразия порядка k . Мы покажем сейчас, что в случае конечного порядка определения II.2 и II.23 можно упростить.

Предложение II.44. Пусть (M, μ) — многообразие с дифференцируемым умножением, такое что отображение $s_x : M \rightarrow M$, $x \in$

M , определённое формулой $s_x(y) = x \cdot y$, удовлетворяет следующим аксиомам:

- (1) $s_x(x) = x$;
- (2^k) $(s_x)^k = \text{id}$, причём k есть наименьшее число с таким свойством;
- (3) $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, где $z = s_x(y)$;
- (4) x — неподвижная изолированная точка для s_x .

Тогда (M, μ) — регулярное s -многообразие порядка k .

Доказательство. Достаточно показать, что (1) — (4) влекут (2') и (4') из определения II.2. Очевидно, что (2') следует из (2^k). Далее, легко проверить, что если выполнены (1) и (2^k), то (4) эквивалентно (4'). Нужно лишь повторить рассуждения, предшествующие определению II.2. $\square$

Предложение II.45. Пусть G — связная группа Ли, H — её замкнутая подгруппа и ϕ — автоморфизм группы G , такой что

- (i) $(G^\phi)^0 \subset H \subset G^\phi$;
- (iii^k) $\phi^k = \text{id}$, причём k — наименьшее целое число с таким свойством.

Тогда тройка (G, H, ϕ) есть регулярное однородное s -многообразие порядка k .

Доказательство. Пусть ϕ_* — индуцированный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Положим $A = \text{id} - \phi_*$. Нам нужно показать, что $\mathfrak{g}_{0A} = \mathfrak{h}$. Очевидно, что $\mathfrak{h} = \ker(A)$, и, значит, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{0A}$ (см. формулу (13)). Предположим теперь, что существует элемент X , принадлежащий $\mathfrak{g}_{0A}$, но не принадлежащий $\mathfrak{h}$. Без потери общности можно допустить, что $AX \neq 0$, $A^2X = 0$. Тогда $\phi_*(X) = X - Z$, где $\phi_*(Z) = Z$. Отсюда получаем по индукции $(\phi_*)^2 X = X - 2Z$, ..., $(\phi_*)^k X = X - kZ$. Так как $(\phi_*)^k X = X$, то $Z = 0$. Мы пришли к противоречию, что и завершает доказательство. $\square$

Замечание II.46. Ясно, что регулярное s -многообразие порядка 2 есть не что иное, как симметрическое пространство в смысле Лооза.

Проблема II.47. Можно ли получить содержательную теорию "регулярных s -многообразий", исходя из аксиом (1), (2'), (3) и (4)?

РИМАНОВЫ РЕГУЛЯРНЫЕ S -СТРУКТУРЫ

При классификации обобщённых симметрических римановых пространств размерности $n \leq 5$ (см. гл. VI) было сделано следующее за-

мечательное наблюдение: если (M, g) – неприводимое обобщенное симметрическое риманово пространство порядка $k > 2$, то все римановы регулярные s -структуры на (M, g) имеют одну и ту же каноническую связность (отличную от римановой связности). Естественно возникает гипотеза, что это не случайный факт.

Для римановых симметрических пространств соответствующее утверждение неверно: имеются римановы симметрические пространства, допускающие непараллельную регулярную s -структуру, например E^5 , S^5 или $S^2 \times E^3$ (см. добавление 4). Так что предположение о порядке ($k > 2$) существенно. Неприводимость тоже существенна. Действительно, рассмотрим произведение $S^5 \times (M, g)$, где S^5 – обычная сфера, а (M, g) – обобщенное симметрическое риманово пространство порядка $k > 2$. Это произведение тоже порядка $k' > 2$, и всё же оно допускает больше чем одну каноническую связность, порождённую её римановой регулярной s -структурой.

В этом параграфе мы докажем некоторые элементарные факты, свидетельствующие в пользу высказанной гипотезы.

Лемма II.48. Пусть $\{s_x\}, \{s'_x\}$ – римановы регулярные s -структуры на связном пространстве (M, g) . Предположим, что существует связная подгруппа $K \subset I(M, g)$, такая что

(а) $\text{Tr}(M, \{s_x\}) \subset K \subset \text{Aut}(M, \{s_x\})$,
 $\text{Tr}(M, \{s'_x\}) \subset K \subset \text{Aut}(M, \{s'_x\})$,
 (б) K – нормальная подгруппа в $\text{Aut}(M, \{s_x\})$ и $\text{Aut}(M, \{s'_x\})$.

Тогда канонические связности $\tilde{V}$ и $\tilde{V}'$ совпадают.

Доказательство. Рассмотрим автоморфизмы

$$\phi: \text{Aut}(M, \{s_x\}) \rightarrow \text{Aut}(M, \{s_x\}) \text{ и } \phi': \text{Aut}(M, \{s'_x\}) \rightarrow \text{Aut}(M, \{s'_x\}),$$

задаваемые формулами $\phi(q) = s_0 \circ q \circ s_0^{-1}$ и $\phi'(q') = s'_0 \circ q' \circ s'^{-1}_0$, где $o \in M$ – некоторая фиксированная точка. Тогда группа K инвариантна относительно ϕ и ϕ' , и, согласно предложению II.38, мы получаем регулярные однородные s -многообразия $(K, K_0, \phi|_K)$ и $(K, K_0, \phi'|_K)$. Достаточно показать, что соответствующие редуктивные однородные пространства совпадают.

Рассмотрим эндоморфизмы $A = I - \phi_*$, $A' = I - \phi'_*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Имеют место разложения Фиттинга $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{1A} \dot{+} \mathfrak{g}_{0A}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{1A'} \dot{+} \mathfrak{g}_{0A'}$, где $\mathfrak{g}_{0A} = \mathfrak{g}_{0A'} = \mathfrak{g}_0$. Всё, что нужно доказать, – это равенство $\mathfrak{g}_{1A} = \mathfrak{g}_{1A'}$.

Обозначим $I(M, g)$ через G , и пусть G_0 – подгруппа изотропии группы G в точке $o \in M$. Так как G_0 компактна, то существу-

ет $\text{ad}(G_0)$ -инвариантное скалярное произведение B на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В частности, $s_0, s'_0 \in G_0$, и потому B инвариантно относительно $\mathfrak{b}_*, \mathfrak{b}'_*$. Сузим билинейную форму B на подалгебру $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ и рассмотрим ортогональное разложение $\mathfrak{f} = \mathfrak{m} + \mathfrak{f}_0$, где $\mathfrak{m}$ определяется как ортогональное дополнение к $\mathfrak{f}_0$. Это разложение инвариантно относительно $\mathfrak{b}_*$ и $\mathfrak{b}'_*$. Согласно лемме Фиттинга, $\mathfrak{m} = \mathfrak{f}_{1A} = \mathfrak{f}_{1A'}$, что и завершает доказательство. $\square$

Теорема II.49. Пусть $\{s_x\}, \{s'_x\}$ — римановы регулярные s -структуры на связном многообразии (M, g) . Если хотя бы одна из групп

$$\text{Tr}(M, \{s_x\}), \text{Cl}^*(\{s_x\}), \text{Aut}^*(M, \{s_x\}) \cap I(M, g), \text{Aut}^*(M, \{s_x\})$$

совпадает с какой-нибудь из групп

$$\text{Tr}(M, \{s'_x\}), \text{Cl}^*(\{s'_x\}), \text{Aut}^*(M, \{s'_x\}) \cap I(M, g), \text{Aut}^*(M, \{s'_x\}),$$

то канонические связности $\tilde{V}$ и $\tilde{V}'$ совпадают.

Доказательство. Во всех случаях мы получаем некоторую группу K со свойствами (а) и (б) в качестве общего члена наших двух рядов групп. $\square$

Следствие II.50. Пусть (M, g) — обобщённое симметрическое риманово пространство, такое что компонента единицы группы всех изометрий $I(M, g)$ есть наименьшая транзитивная группа изометрий пространства (M, g) . Тогда все римановы регулярные s -структуры на (M, g) имеют общую каноническую связность.

Доказательство очевидно. $\square$

Один из случаев, когда применимо наше следствие, это — пространство без инфинитезимальных вращений, т.е. пространство, допускающее лишь конечное число изометрий, оставляющих неподвижной некоторую точку.

Наконец, с учётом теоремы II.32 мы получаем

Следствие II.51. Пусть $\{s_x\}, \{s'_x\}$ — две римановы регулярные s -структуры на связном римановом пространстве (M, g) . Тогда $\{s_x\}, \{s'_x\}$ имеют одну и ту же каноническую связность, если и только если они имеют одну и ту же группу трансвекций.

Проблема II.52. Следующая гипотеза также мотивирована наблюдением, сделанным в размерностях $n \leq 5$ (см. [КЗ], гл. 13). Пусть (M, g)

– обобщённое симметрическое риманово пространство порядка > 2 и неприводимое. Пусть, далее, $\{s_x\}$ – риманова регулярная s -структура на (M, g) , а $\tilde{V}$ – её каноническая связность. Тогда $I(M, g)^0 \subset A(M, \tilde{V})$.

МЕТРИЗУЕМЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ s -МНОГООБРАЗИЯ

Регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ называется метризуемым, если существует риманова метрика g на M , инвариантная относительно $\{s_x : x \in M\}$. Обозначим через $Cl^a(\{s_x\})$ замыкание в $A(M, \tilde{V})$ группы, порождённой множеством $\{s_x : x \in M\}$. Справедлив следующий критерий метризуемости:

Теорема II.53. Связное регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ метризуемо, если и только если подгруппа изотропии группы $Cl^a(\{s_x\})$ в любой точке компактна.

Доказательство. а) Пусть g – риманова метрика на M , инвариантная относительно $\{s_x\}$. Тогда замыкание $Cl(\{s_x\})$ в $I(M, g)$ (см. гл. 0) совпадает с $Cl^a(\{s_x\})$ (в обоих случаях мы используем компактно-открытую топологию). Отсюда следует, что все подгруппы изотропии группы $Cl^a(\{s_x\})$ компактны.

б) Пусть группа изотропии G_0 группы $G = Cl^a(\{s_x\})$ компактна для некоторой фиксированной точки $o \in M$. Тогда существует положительно-определённое скалярное произведение g_0 в касательном пространстве M_o , инвариантное относительно действия группы G_0 . Отсюда мы получаем риманову метрику g , инвариантную относительно группы G , а значит и относительно $\{s_x\}$. $\square$

Для s -структур конечного порядка имеет место более простой результат:

Теорема II.54. Пусть $\{s_x\}$ – регулярная s -структура конечного порядка на связном многообразии M , а $\tilde{V}$ – её каноническая связность. Тогда $(M, \{s_x\})$ метризуемо, если и только если группа голономии аффинного редуктивного пространства $(M, \tilde{V})$ относительно компактна (как подгруппа общей линейной группы в любой точке отсчёта $o \in M$).

Доказательство. Как нам известно из замечания I.26, группа голономии любой точки $o \in M$ изоморфна группе изотропии в точке o группы $Tr(M) = Tr(M, \{s_x\})$. Допустим, что эта подгруппа компактна. Тогда можно построить риманову метрику g , инвариантную относительно действия группы $Tr(M)$. Для каждого аффинного преобразования $\varphi : M \rightarrow M$ метрика φ^*g также инвариантна относительно

группы $\text{Tr}(M)$. Действительно, $\text{Tr}(M)$ есть нормальная подгруппа группы $A(M)$, и, таким образом, для каждого элемента $h \in \text{Tr}(M)$ имеется элемент $h' \in \text{Tr}(M)$, такой что $h \circ \varphi = \varphi \circ h'$. Отсюда $h^*(\varphi^*g) = \varphi^*(h'^*g) = \varphi^*g$. Выберем точку $o \in M$ и положим $\tilde{g} = g + s_o^*g + \dots + (s_o^*)^{k-1}g$, где k — порядок $\{s_x\}$. Тогда $\tilde{g}$ инвариантна относительно s_o и $\text{Tr}(M)$. Так как каждое s_x имеет вид $s_x = h \circ s_o \circ h^{-1}$, где $h \in \text{Tr}(M)$ и $h(o) = x$, то $\tilde{g}$ инвариантна относительно $\{s_x\}$.

Обратное утверждение очевидно, поскольку $\text{Tr}(M, \{s_x\}) \subset I(M, g)$ для каждой $\{s_x\}$ -инвариантной римановой метрики g . $\square$

НЕСВЯЗНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ s -МНОГООБРАЗИЯ

В нашем определении II.2 мы не предполагаем, что многообразие M связно. Тем не менее эта книга посвящена в действительности теории связных регулярных s -многообразий. Что же касается несвязных регулярных s -многообразий, то они потребовали бы специальной теории, которая в этом трактате не рассматривается. Такая теория, по-видимому, должна быть нетривиальна, как показывают следующие примеры:

Пример 1. Пусть $(M_1, \{s_x^1\})$, $(M_2, \{s_y^2\})$ — два регулярных s -многообразия и M — дизъюнктивная сумма M_1 и M_2 , которую обозначим $M = M_1 \sqcup M_2$. Тогда можно определить новое регулярное s -многообразие $(M, \{s_z\})$ по правилу:

если $z \in M_1$, то полагаем $s_z|_{M_1} = s_z^1$, $s_z|_{M_2} = \text{id}$;

если $z \in M_2$, то полагаем $s_z|_{M_1} = \text{id}$, $s_z|_{M_2} = s_z^2$.

Пример 2. Пусть $(M, \{s_x\})$ — регулярное s -многообразие и A — произвольное множество индексов. Для каждого $\alpha \in A$ рассмотрим копию $(M_\alpha, \{s_{x_\alpha}^\alpha\})$ пространства $(M, \{s_x\})$ и положим $M^\cup = \bigsqcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ (дизъюнктивная сумма). Тогда можно определить регулярное s -многообразие $(M^\cup, \{\tilde{s}_x\})$ формулой

$$\tilde{s}_{x_\alpha}|_{M_\beta} = s_{x_\beta}^\beta \quad \text{для любых } \alpha, \beta \in A,$$

где x_α, x_β обозначают копии одного и того же элемента $x \in M$ в M_α и M_β соответственно.

Пример 3. Пусть $(M_i, \{s_{x_i}^i\})$, $i = 1, 2, 3$, — три экземпляра одного и того же регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$. Положим

$\bar{M} = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3$. Правило

$$\bar{s}_{x_i}(u_i) = s_{x_i}^i(u_i) \text{ для } i = 1, 2, 3;$$

$\bar{s}_{x_i}(u_j) = s_{x_k}^k(u_k)$ для $i \neq j$, где $k \in \{1, 2, 3\}$ и $i \neq k \neq j$, определяет регулярную s -структуру $\{\bar{s}_x\}$ на $\bar{M}$.

Пример 4. Пусть E^2 — координатная плоскость в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 , определяемая первыми двумя координатными осями. Рассмотрим регулярные s -многообразия $(E^2, \{r_x\})$ и $(E^3, \{s_x\})$, определённые так.

Каждое r_x имеет вид $\bar{t}_x \circ r_0 \circ t_x^{-1}$, где $\bar{t}_x$ — некоторый сдвиг в E^2 а r_0 — вращение вокруг начала на положительный угол $\pi/2$ в плоскости E^2 .

Каждое s_x имеет вид $t_x \circ s_0 \circ t_x^{-1}$, где t_x — некоторый сдвиг в E^3 , а s_0 — композиция двух отображений; одно из них — это вращение пространства E^3 вокруг третьей координатной оси на положительный угол $\pi/2$, а другое — отражение в E^3 относительно плоскости E^2 (см. пример, приведённый после предложения 0.29).

Рассмотрим проекцию $p: E^3 \rightarrow E^2$, и для каждого $x \in E^3$ пусть v_x обозначает сдвиг плоскости E^2 в направлении нормали на высоту точки x над E^2 .

Положим $M = E^3 \sqcup E^2$ (дизъюнктивная сумма) и определим симметрии $\hat{s}_w$ многообразия M следующими правилами:

$$\begin{aligned} \hat{s}_x(y) &= s_x(y) && \text{для } x, y \in E^3; \\ \hat{s}_u(v) &= r_u(v) && \text{для } u, v \in E^2; \\ \hat{s}_x(u) &= r_{p(x)}(u) && \text{для } x \in E^3, u \in E^2; \\ \hat{s}_u(x) &= v_x(r_u(p(x))) && \text{для } u \in E^2, x \in E^3. \end{aligned}$$

Тогда $\{\hat{s}_w\}$ есть регулярная s -структура на M .

Доказательства предоставляются читателю.



Литература: первоисточники — [Ф1-3]', [GL2], [Gr], [КЗ], [К7], [L0], [LP1-2], [LoI-2], [СТ1-2]'; дополнительные источники — [J], [КН1-2]', [Wi].

Глава III

Локально-регулярные s -многообразия

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИЗЛОЖЕННОЙ ВЫШЕ ТЕОРИИ ¹⁶⁾

Вводная часть этой главы основана на следующей стандартной лемме (см., например, [LoI]):

Лемма III.1. Пусть (M, V) – многообразие со связностью, $\pi : T(M) \rightarrow M$ – проекция. Существует окрестность N_0 нулевого сечения O_M в $T(M)$, такая что отображение

$$\pi \times \text{Exp} : v \mapsto (\pi(v), \text{Exp}_{\pi(v)} v)$$

есть диффеоморфизм окрестности N_0 на некоторую окрестность N диагонали в $M \times M$.

Пусть M – гладкое многообразие и $N \subset M \times M$ – окрестность диагонали $\Delta(M \times M)$. Обозначим через p_1, p_2 проекции произведения $M \times M$ на сомножители. Тогда для каждого $x \in M$ множество $N|_x = p_2 \{ p_1^{-1}(x) \cap N \}$ есть окрестность точки x в M .

Определение III.2. Локальная регулярная s -структура на многообразии M – это дифференцируемое отображение $\mu : N \rightarrow M$, где N есть окрестность в $M \times M$ диагонали $\Delta(M \times M)$, а отображение $s_x : N|_x \rightarrow M$, определённое формулой $s_x(y) = \mu(x, y)$, удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $s_x(x) = x$;

(2) каждое s_x есть диффеоморфизм окрестности $N|_x$ на некоторую окрестность N'_x точки x в M ;

(3) существует окрестность W диагонали в $M \times M \times M$, такая что для $(x, y, u) \in W$

$$(s_x \circ s_y)(u) = (s_z \circ s_x)(u), \text{ где } z = s_x(y);$$

(4) касательное отображение $(s_x)_{*x} : T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ не имеет других неподвижных векторов, кроме нулевого.

III.3. Ясно, что если $\mu : N \rightarrow M$ — локальная регулярная s -структура на M и $N' \subset M$ — некоторая меньшая окрестность диагонали $\Delta(M \times M)$, то сужение μ на N' есть новая локальная регулярная s -структура μ' . Далее, если $U \subset M$ — открытое множество, то $\mu|_U = \mu|_{N \cap (U \times U)}$ есть локальная регулярная s -структура на U .

III.4. Легко видеть, что для $(x, y) \in N$ области определения отображений $s_x \circ s_y$ и $s_z \circ s_x$ суть открытые окрестности точки y .

Определение III.5. Многообразие M вместе с локальной регулярной s -структурой μ называется локально-регулярным s -многообразием. Диффеоморфизмы s_x называются локальными симметриями многообразия (M, μ) .

Мы распространим обозначение $(M, \{s_x\})$ на локально-регулярные s -многообразия.

Определение III.6. Пусть $(M, \mu), (M', \mu')$ — два локально-регулярных s -многообразия. Локальный диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow U'$ (где $U \subset M, U' \subset M'$ связны) называется локальным изоморфизмом многообразия (M, μ) в многообразие (M', μ') , если $(\Phi \circ \mu)(,) = \mu'(\Phi(,), \Phi(,))$ в некоторой окрестности Z_U диагонали в $U \times U$. В частности, локальный изоморфизм многообразия (M, μ) в многообразие (M', μ') , определённый диффеоморфизмом $\Phi : M \rightarrow M'$, будем называть симilarityностью многообразия (M, μ) на многообразие (M', μ') .

III.7. Пусть (M, μ_1) и (M, μ_2) — два локально-регулярных s -многообразия с одним и тем же нислежащим многообразием M , такие что μ_1, μ_2 имеют одно и то же сужение μ на некоторую окрестность N диагонали $\Delta(M \times M)$. Тогда тождественное отображение $i : M \rightarrow M$ есть similarityность многообразия (M, μ_1) на многообразие (M, μ_2) .

Предложение III.8. Пусть $(M, \{s_x\})$ — локально-регулярное s -многообразие. Тогда каждая локальная симметрия $s_x, x \in M$, суженная на окрестность точки x , есть локальный изоморфизм многообразия $(M, \{s_x\})$ в многообразие $(M, \{s_x\})$ (называемый локальным автоморфизмом многообразия $(M, \{s_x\})$).

Доказательство. Пусть $V_x \subset N|_x$ — окрестность точки x , такая что $\{x\} \times V_x \times V_x \subset W$ (см. аксиому (3) из III.2). Тогда для каждой пары $(y, u) \in V_x \times V_x$ мы имеем $(s_x \circ s_y)(u) = (s_z \circ s_x)(u)$, $z = s_x(y)$. Таким образом, $s_x|_{V_x}$ есть локальный изоморфизм.

(Здесь $U = V_x$, а $Z_U = V_x \times V_x$.) $\square$

Последний результат можно усилить следующим образом:

Предложение III.9. Для каждой точки $p \in M$ существует окрестность V_p , такая что для каждого $x \in V_p$ симметрия s_x есть локальный автоморфизм V_p .

Доказательство. Выберем V_p таким образом, чтобы $V_p \times V_p \times V_p \subset W$. $\square$

Свойство однородности регулярных s -многообразий заменяется в локальном случае более слабым свойством:

Предложение III.10. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное локально-регулярное s -многообразие. Тогда полугруппа локальных преобразований, алгебраически порождённая всеми локальными симметриями s_x , действует на M транзитивно. Следовательно, псевдогруппа всех локальных автоморфизмов многообразия $(M, \{s_x\})$ транзитивна.

Доказательство. Первое утверждение может быть доказано тем же рассуждением, что и предложение II.21; последнее утверждение очевидным образом следует из этого рассуждения и III.9. $\square$

Пусть S снова обозначает тензорное поле $S_x = (s_x)_{*x}$ для локально-регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$.

Теорема III.11. Существует единственная аффинная связность $\tilde{\nabla}$ на $(M, \{s_x\})$, называемая канонической связностью, инвариантная относительно ростков всех локальных симметрий s_x и такая, что $\tilde{\nabla} S = 0$.

Доказательство. то же, что и для утверждения А теоремы II.4, с необходимыми локализациями. Например, нужно ввести локальные дифференцирования, соответствующие локальным автоморфизмам многообразия $(M, \{s_x\})$. $\square$

Из последней теоремы следует, что тензор кривизны $\tilde{R}$ и тензор кручения $\tilde{T}$ канонической связности инвариантны относительно $\{s_x\}$, а значит, и относительно тензора S : $S(\tilde{R}) = \tilde{R}$, $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$.

К рассматриваемой ситуации непосредственно применимы предложения 0.35 — 0.37:

Предложение III.12. Пусть $\{s_x\}$ — локальная регулярная s -структура на многообразии M . Тогда каждое тензорное поле P , инвариантное относительно ростков всех s_x , параллельно относительно $\tilde{\nabla}$.

Предложение III.13. Пусть $\{s_x\}$ — локальная регулярная s -

структура на многообразии M . Тогда относительно канонической связности $\tilde{V}\tilde{R} = 0$, $\tilde{V}\tilde{T} = 0$, $\tilde{V}S = 0$.

Теорема III.14. Всякое локально-регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ допускает согласованную структуру аналитического многообразия. Относительно этой структуры каноническая связность $\tilde{V}$ и тензорное поле S аналитичны.

Предложение III.15. Пусть $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_x\})$ — два локально-регулярных s -многообразия, а $\tilde{V}$ и $\tilde{V}'$ — их канонические связности. Локальный диффеоморфизм Φ многообразия M на многообразие M' представляет собой локальный изоморфизм, если и только если он является локальным аффинным отображением из $(M, \tilde{V})$ в $(M', \tilde{V}')$, таким что $\Phi_*(S) = S'$ в области определения диффеоморфизма Φ .

Доказательство. Пусть $\Phi : U \rightarrow U'$ — локальный изоморфизм. Тогда $\Phi_*(S|_U) = S'|_U$. Пусть теперь связность ∇' , определённая на U' , есть образ связности $\tilde{V}|_U$ при отображении Φ . Имеем

$$0 = \tilde{V}S = \Phi(\tilde{V}S) = \nabla'S',$$

$$\nabla' = \Phi(\tilde{V}) = (\Phi \circ s_x)(\tilde{V}) = (s'_{\Phi(x)} \circ \Phi)(\tilde{V}) = s'_{\Phi(x)}(\nabla').$$

Согласно части теоремы III.11, касающейся единственности, мы имеем $\nabla' = \tilde{V}'$ на U' . Следовательно, Φ есть аффинное отображение. В частности, каждое s_x (соотв. s'_y) определяет локальное аффинное преобразование пространства $(M, \tilde{V})$ (соотв. $(M', \tilde{V}')$) в окрестности точки x (соотв. y), как это видно из III.8.

Обратно, пусть $\Phi : U \rightarrow U'$ — аффинное преобразование, переводящее S в S' . Пусть точка $p \in U$ фиксирована и N_p — её связанная окрестность, обладающая следующими свойствами:

$$N_p \times N_p \subset N, \quad \Phi(N_p) \times \Phi(N_p) \subset N', \quad \mu(N_p, N_p) \subset U;$$

$$N_p \times N_p \times N_p \subset W, \quad \Phi(N_p) \times \Phi(N_p) \times \Phi(N_p) \subset W'.$$

Для каждого $x \in N_p$ отображение s_x является локальным автоморфизмом окрестности N_p , а $s'_{\Phi(x)}$ — локальным автоморфизмом множества $\Phi(N_p)$. Таким образом, s_x и $s'_{\Phi(x)}$ оба суть локальные преобразования соответствующих окрестностей. Отсюда следует, что $\Phi \circ s_x$ и $s'_{\Phi(x)} \circ \Phi$ являются аффинными отображениями окрестности N_p . Далее, отображения $\Phi \circ s_x$ и $s'_{\Phi(x)} \circ \Phi$ имеют одно и то же касательное отображение в точке x , так как $\Phi(S_x) = S'_{\Phi(x)}$. Поскольку

N_p связно, мы получаем $\Phi \circ s_x = s'_{\Phi(x)} \circ \Phi$ на N_p . Другими словами, $(\Phi \circ s_x)(y) = (s'_{\Phi(x)} \circ \Phi)(y)$ для каждого элемента $(x, y) \in N_p \times N_p$.

Построив подходящую окрестность N_p для каждого $p \in U$, мы заключаем, что $(\Phi \circ s_x)(y) = (s'_{\Phi(x)} \circ \Phi)(y)$ на множестве $Z_U = \bigcup_{p \in U} N_p \times N_p$. Здесь Z_U — некоторая окрестность диагонали в $U \times U$. Итак, Φ — локальный изоморфизм. $\square$

Предложение III.16. Пусть $(M, \tilde{V})$ — аффинное многообразие, такое что $\tilde{V}\tilde{K} = 0$, $\tilde{V}\tilde{T} = 0$, и пусть S — тензорное поле типа $(1, 1)$ на M , удовлетворяющее условиям:

- (а) S и $I - S$ обратимы;
- (б) $\tilde{V}S = 0$ и $S(\tilde{K}) = \tilde{K}$, $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$.

Тогда имеется единственная с точностью до симilarity локальная регулярная s -структура $\{s_x\}$, такая что S есть касательное тензорное поле для $\{s_x\}$; а $\tilde{V}$ есть каноническая связность пространства $(M, \{s_x\})$.

Доказательство. Пусть N'_0 — окрестность нулевого сечения O_M , существование которой утверждается в лемме III.1. Легко видеть, что множество $S^{-1}N'_0 = \{s_{x(v)}^{-1}(v) : v \in N'_0\}$ тоже является окрестностью сечения O_M . Положим $N_0 = N'_0 \cap S^{-1}N'_0$, и пусть N — соответствующая окрестность диагонали в $M \times M$. Для $(x, y) \in N$ положим

$$\mu(x, y) = (\widetilde{\text{Exp}}_x \circ S_x \circ \widetilde{\text{Exp}}_x^{-1})(y).$$

Ясно, что μ дифференцируемо, и каждая симметрия s_x задаётся формулой $s_x = \widetilde{\text{Exp}}_x \circ S_x \circ \widetilde{\text{Exp}}_x^{-1}$ на $N|_x$. (Здесь $S_x = (s_x)_{*x}$.) Поскольку $S_x(\tilde{K}_x) = \tilde{K}_x$ и $S_x(\tilde{T}_x) = \tilde{T}_x$, то s_x есть локальное аффинное преобразование на $N|_x$, согласно B7.

Далее, для фиксированного $x \in M$ положим $S' = s_{x*}(S)$ на $N|_x$. Так как $\tilde{V}S = 0$, а s_x сохраняет связность, то $\tilde{V}S' = 0$. Теперь, $S'_x = S_x$, и продолжение этого тензорного поля по параллельности на $N|_x$ единственно; отсюда следует, что $S' = S$ на $N|_x$, а s_x сохраняет S .

Теперь для фиксированного $p \in M$ выберем связную окрестность N_p , такую что

$$N_p \times N_p \subset N, \quad \mu(N_p, N_p) \times \mu(N_p, N_p) \subset N.$$

Тогда для $x, y \in N_p$ мы, очевидно, имеем

$$N_p \subset N|_y, s_y(N_p) \subset N|_x, N_p \subset N|_x, s_x(N_p) \subset N|_{s_x(y)}.$$

Отсюда вытекает, что для любых $x, y \in N_p$ композиции $s_x \circ s_y$ и $s_{s_x(y)} \circ s_x$ будут аффинными преобразованиями на N_p , сохраняющими S . Сравнивая касательные отображения в точке y , видим, что $s_x \circ s_y$ и $s_{s_x(y)} \circ s_x$ совпадают на N_p . Итак, (3) имеет место для любой тройки (x, y, u) , где $x, y, u \in N_p$. Следовательно, (3) выполняется в некоторой окрестности W диагонали в $M \times M \times M$. Мы доказали, что (M, μ) есть локально-регулярное s -многообразие. Если теперь μ' — другая локально-регулярная s -структура на M , индуцирующая $\tilde{V}$ и S , то тождественное отображение $i: M \rightarrow M$ будет симилиарностью структуры (M, μ) на (M, μ') , согласно предложению III.15. $\square$

Определение III.17. Локально-регулярные s -многообразия $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$ называются локально-изоморфными, если для любых $x \in M$, $y \in M'$ существует по крайней мере один локальный изоморфизм окрестности точки x на окрестность точки y .

В силу предложения III.10, два связных локально-регулярных s -многообразия $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$ локально-изоморфны, если существует по крайней мере один локальный изоморфизм многообразия $(M, \{s_x\})$ в многообразие $(M', \{s'_y\})$.

Теорема III.18. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное локально-регулярное s -многообразие и $\pi: M' \rightarrow M$ — накрывающая проекция, т.е. M' — накрывающее многообразие. Тогда имеется, с точностью до симилиарности, единственное локально-регулярное s -многообразие $(M', \{s'_y\})$, которое локально-изоморфно $(M, \{s_x\})$ (посредством π).

Доказательство. Строим накрывающую связность $\tilde{V}'$ для связности $\tilde{V}$ и накрывающее тензорное поле S' для поля S на многообразии M' . Далее используем предложение III.6 и предложение III.15. $\square$

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ s -МНОГООБРАЗИЯ

Пусть $(M, \{s_x\})$ — локально-регулярное s -многообразие, $\tilde{V}$ — его каноническая связность, а $\tilde{R}$, $\tilde{T}$ — соответственно тензорное поле кривизны и тензорное поле кручения связности $\tilde{V}$. Пусть o — фиксированная точка в M . Обозначим через $V = M_o$ соответствующее касательное пространство.

Предложение III.19. В начальной точке o тензорные поля S , $\tilde{R}$, $\tilde{T}$ удовлетворяют следующим алгебраическим условиям:

(i) как S_0 , так и $I - S_0$ суть неособые линейные преобразования пространства V ;

(ii) для любых $X, Y \in V$ эндоморфизм $\tilde{R}_0(X, Y)$, действующий как дифференцирование на тензорной алгебре $\tilde{\mathcal{L}}(V)$, удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{R}(X, Y)(S_0) = 0, \quad \tilde{R}(X, Y)(\tilde{R}_0) = 0, \quad \tilde{R}_0(X, Y)(\tilde{T}_0) = 0;$$

(iii) тензоры $\tilde{R}_0$ и $\tilde{T}_0$ инвариантны относительно S_0 ;

(iv) $\tilde{R}_0(X, Y) = -\tilde{R}_0(Y, X)$, $\tilde{T}_0(X, Y) = -\tilde{T}_0(Y, X)$;

(v) выполняется первое тождество Бьянки

$$\epsilon [\tilde{R}_0(X, Y)Z - \tilde{T}_0(\tilde{T}_0(X, Y), Z)] = 0;$$

(vi) выполняется второе тождество Бьянки

$$\epsilon [\tilde{R}_0(\tilde{T}_0(X, Y), Z)] = 0.$$

Доказательство. (i) и (iii) очевидны, соотношение $\tilde{R}_0(X, Y)(S_0) = 0$ следует из $\tilde{V} S = 0$, а остальные формулы нам уже известны из I.16. $\square$

Теперь докажем, что тензоры S_0 , $\tilde{R}_0$, $\tilde{T}_0$ локально характеризуют соответствующее регулярное s -многообразие.

Определение III.20. Инфинитезимальное s -многообразие — это набор $(V, S_0, \tilde{R}_0, \tilde{T}_0)$, где V — вещественное конечномерное векторное пространство, а S_0 , $\tilde{R}_0$, $\tilde{T}_0$ — тензоры типов $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$ соответственно, такие что выполнены условия (i) — (vi) из III.19. ¹⁷⁾

Два инфинитезимальных многообразия $(V_i, S_i, \tilde{R}_i, \tilde{T}_i)$, $i = 1, 2$, называются изоморфными, если существует линейный изоморфизм $f: V_1 \rightarrow V_2$ векторных пространств, такой что $f(S_1) = S_2$, $f(\tilde{R}_1) = \tilde{R}_2$, $f(\tilde{T}_1) = \tilde{T}_2$. Отображение f называют тогда изоморфизмом инфинитезимального многообразия $(V_1, S_1, \tilde{R}_1, \tilde{T}_1)$ на инфинитезимальное многообразие $(V_2, S_2, \tilde{R}_2, \tilde{T}_2)$.

Так как псевдогруппа всех локальных автоморфизмов действует транзитивно на связном многообразии $(M, \{s_x\})$ и тензорные поля S , $\tilde{R}$ и $\tilde{T}$ инвариантны относительно неё, мы видим, что для любых двух точек $p, q \in M$ наборы $(M_p, S_p, \tilde{R}_p, \tilde{T}_p)$ и $(M_q, S_q, \tilde{R}_q, \tilde{T}_q)$ суть изоморфные инфинитезимальные s -многообразия. Поэтому введём следующее определение:

Определение III.21. Инфинитезимальная модель связного локально-регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$ — это класс изоморфизма инфинитезимальных s -многообразий $(M_p, S_p, \tilde{K}_p, \tilde{T}_p)$, $p \in M$.

Теорема III.22. Два связных локально-регулярных s -многообразия $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$ локально-изоморфны, если и только если они имеют одну и ту же инфинитезимальную модель.

Доказательство. Из III.15 немедленно следует, что "локально-изоморфны" влечёт "имеют одну и ту же инфинитезимальную модель". Пусть теперь $p \in M$, $p' \in M'$ — две точки, и пусть существует изоморфизм f из $(M_p, S_p, \tilde{K}_p, \tilde{T}_p)$ на $(M'_{p'}, S'_{p'}, \tilde{K}'_{p'}, \tilde{T}'_{p'})$. Согласно B7, найдётся аффинное отображение F связной окрестности U_p на окрестность $U'_{p'}$, такое что $F(p) = p'$, $F_*p = f$. Кроме того, $f(S_p) = S'_{p'}$ и $\tilde{\nabla}S = 0$, $\tilde{\nabla}'S' = 0$. Следовательно, $F_*(S|_U) = (S'|_{U'})$. В силу III.15, F есть локальный изоморфизм. $\square$

Замечание. Если $f: M_p \rightarrow M'_{p'}$ — изоморфизм инфинитезимальных s -многообразий, как выше, то он индуцируется некоторым локальным изоморфизмом F локально-регулярных s -многообразий $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$. Поэтому мы будем иногда для краткости говорить об инфинитезимальном изоморфизме $f: M_p \rightarrow M'_{p'}$ между локально-регулярными s -многообразиями.

Укажем теперь связь между нашей локальной теорией и глобальными понятиями. В II.2 мы определили регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$. Семейство $\{s_x\}$ называется регулярной s -структурой. Ясно, что всякая регулярная s -структура является также и локальной регулярной s -структурой. Говорят, что два регулярных s -многообразия $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$ изоморфны, если существует диффеоморфизм $\Phi: M \rightarrow M'$, такой что $\Phi \circ s_x = s'_{\Phi(x)} \circ \Phi$ для всех $x \in M$ (его называют изоморфизмом). Легко видеть, что $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$ изоморфны, если и только если они симильны как локально-регулярные s -многообразия.

Предложение III.23. Пусть $(M, \{s_x\})$ и $(M', \{s'_y\})$ — связные и односвязные регулярные s -многообразия. Тогда каждый локальный изоморфизм многообразия $(M, \{s_x\})$ в многообразие $(M', \{s'_y\})$ может быть продолжен до изоморфизма.

Доказательство. Пусть $\Phi_U: U \rightarrow U'$ — локальный изоморфизм ($U \subset M$, $U' \subset M'$ связны, согласно определению III.6). Тогда Φ_U есть локальное аффинное отображение многообразия $(M, \tilde{\nabla})$ в многообразие $(M', \tilde{\nabla}')$, которое отображает $S|_U$ в $S'|_{U'}$. Согласно B 2, Φ_U мож-

но продолжить до глобального аффинного отображения $\Phi: M \rightarrow M'$. Так как S параллельно относительно связности $\tilde{V}$, а S' параллельно относительно связности $\tilde{V}'$, то $\Phi(S) = S'$ на M . Поэтому продолженное отображение Φ есть симilarity и, следовательно, изоморфизм. $\square$

Предложение III.24. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное односвязное локально-регулярное s -многообразие, у которого каноническая связность $\tilde{V}$ полна. Тогда ростки структуры $\{s_x\}$ могут быть продолжены до симметрий некоторой регулярной s -структуры на M .

Доказательство. Каждое s_x , будучи сужено на окрестность точки x , есть локальное аффинное отображение и как таковое может быть продолжено до глобального аффинного преобразования многообразия $(M, \tilde{V})$ (см., например, B2). Это семейство преобразований сохраняет тензорное поле S и, значит, является искомой регулярной s -структурой. $\square$

Соглашение. В последующем мы будем отождествлять инфинитезимальные s -многообразия, а также регулярные s -многообразия, с соответствующими классами изоморфизма (если нет опасности путаницы).

Теорема III.25. Каждое инфинитезимальное s -многообразие $(V, S_0, \tilde{K}_0, \tilde{T}_0)$ есть инфинитезимальная модель единственного связанного и односвязного регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$.¹⁸⁾

Доказательство. Используем модификацию конструкции, описанной перед определением I.17. Пусть $\mathfrak{h}'$ — алгебра Ли всех эндоморфизмов A пространства V , которые как дифференцирования тензорной алгебры $\mathfrak{Z}(V)$ удовлетворяют условиям $A(R_0) = A(T_0) = A(S_0) = 0$. Тогда $R_0(X, Y) \in \mathfrak{h}'$ для любых $X, Y \in V$. Построим алгебру Ли $\mathfrak{f}' = V + \mathfrak{h}'$ по формуле (4) главы I. Обозначим через K' односвязную группу Ли, соответствующую $\mathfrak{f}'$, и пусть $H' \subset K'$ — связная подгруппа, соответствующая $\mathfrak{h}'$. Докажем прежде всего, что H' замкнута в K' . Определим линейное отображение $\nu: \mathfrak{f}' \rightarrow \mathfrak{f}'$ как эндоморфизм S_0 на V и как тождественное отображение — на $\mathfrak{h}'$. Из (4) и аксиом (i) — (vi) пункта III.19 видно, что ν представляет собой автоморфизм алгебры Ли, для которого $\mathfrak{h}'$ есть как раз множество неподвижных точек. Далее, ν индуцирует аналитический автоморфизм σ группы K' , для которого H' есть связная компонента множества неподвижных его точек $(K')^\sigma$ (см. определение II.23). Следовательно, $H' \subset K'$ должна быть замкнута.

Применяя доказательство теоремы I.18 к однородному пространству K'/H' , мы можем построить односвязное многообразие $(M, \tilde{V})$ с полной аффинной связностью, удовлетворяющее условиям $\tilde{V}\tilde{T} = 0$,

$\tilde{\nabla} R = 0$ и такое, что для некоторой фиксированной точки $x \in M$ существует линейный изоморфизм $f: V \rightarrow M_x$, отображающий тензоры $\tilde{T}_0, \tilde{K}_0$ в $\tilde{T}_x$ и $\tilde{K}_x$ соответственно. Положим $S_x = f(S_0)$. Многообразие $(M, \tilde{\nabla})$ есть аффинное редуктивное пространство. Согласно предложению I.39, тензор S_x можно продолжить до параллельного тензорного поля S на M . Так как $\tilde{K}_x$ и $\tilde{T}_x$ инвариантны относительно S_x , то $\tilde{K}$ и $\tilde{T}$ инвариантны относительно S на M . Согласно III.16, M допускает локально-регулярную s -структуру $\{s_x\}$, которая индуцирует $\tilde{\nabla}$ и S . В силу III.24, $\{s_x\}$ можно продолжить до регулярной s -структуры.

Единственность следует из III.22 и III.23. $\square$

Следствие III.26. Каждое локально-регулярное s -многообразие локально-изоморфно некоторому регулярному s -многообразию.

Предложение III.27. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное локально-регулярное s -многообразие, каноническая связность которого $\tilde{\nabla}$ полна. Тогда $(M, \{s_x\})$ обладает регулярным покрывающим s -многообразием

$$\pi: (M', \{s'_y\}) \rightarrow (M, \{s_x\}).$$

Доказательство. Пусть $M' \rightarrow M$ — односвязное покрывающее многообразие. Тогда покрывающая связность $\tilde{\nabla}'$ связности $\tilde{\nabla}$ полна. Согласно III.18, $(M, \{s_x\})$ имеет локально-регулярное покрывающее s -многообразие $(M', \{s'_y\})$. В соответствии с III.24, $\{s'_y\}$ можно продолжить до регулярной s -структуры на M' . $\square$

В частности, каждое связное регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ обладает односвязным регулярным покрывающим s -многообразием $(M', \{s'_y\})$. Ясно, что покрывающие преобразования многообразия $(M', \{s'_y\})$ суть симилиарности и, значит, автоморфизмы. Мы можем сформулировать следующий результат:

Теорема III.28. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное локально-регулярное s -многообразие с полной канонической связностью, например связное регулярное s -многообразие. Тогда M есть факторпространство некоторого односвязного регулярного s -многообразия M' , полученное факторизацией по группе автоморфизмов, действующей свободно и собственнo разрывно на M' . (См. [GL2].)

ЛОКАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ s -ТРИПЛЕТЫ

Для того чтобы установить полную симметрию в наших понятиях, введём теперь инфинитезимальный аналог регулярного однородного s -

многообразия. Это — обобщение классического понятия, известного как "симметрическая алгебра Ли".

Определение III.29. Локально-регулярным s -триплетом мы будем называть тройку $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$, где

(а) $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — её подалгебра, ν — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, такой что $\mathfrak{h}$ состоит из всех элементов $\mathfrak{g}$, неподвижных при действии автоморфизма ν ;

(б) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{0A}$ есть 0-компонента Фиттинга линейного эндоморфизма $A = \text{Id} - \nu$.

Условие (б), очевидно, всегда выполняется, если ν имеет конечный порядок.

Легко видеть, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ порождает односвязное регулярное однородное s -многообразие (G, H, σ) , где $\nu = \sigma_*$. В частности, если G — связная и односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а $H < G$ — связная подгруппа, соответствующая $\mathfrak{h}$, то H есть компонента единицы подгруппы G^σ всех неподвижных при действии σ элементов. Так как G^σ замкнута, то H тоже замкнута.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ — локально-регулярный s -триплет. Обозначим 1-компоненту Фиттинга $\mathfrak{g}_{1A}$ обычным символом $\mathfrak{m}$. Таким образом, имеет место каноническое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$, где $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. (Прямое доказательство последней формулы таково. Ясно, что $\mathfrak{h} = \ker A$, $\mathfrak{m} = \text{im } A$ и $A|_{\mathfrak{m}}$ есть автоморфизм. Следовательно, для $X \in \mathfrak{m}$, $U \in \mathfrak{h}$ мы имеем $X = AY$ для некоторого $Y \in \mathfrak{m}$, и $[XU] = [Y - \nu Y, U] = [Y, U] - [\nu Y, \nu U] = A[Y, U] \in \mathfrak{m}$.)

Триплет $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ называется эффективным, если $\mathfrak{h}$ не содержит собственного идеала алгебры $\mathfrak{g}$. Если (G, H, σ) — регулярное однородное s -многообразие, такое что G действует на G/H эффективно, то соответствующий триплет $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma_*)$ эффективен.

Если триплет $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ эффективен, то отображение $U \mapsto \text{ad}(U)|_{\mathfrak{m}}$, определённое на $\mathfrak{h}$, инъективно. Действительно, пусть $\mathfrak{I}$ — множество всех элементов $U \in \mathfrak{h}$, таких что $[U, \mathfrak{m}] = 0$. Для $U' \in \mathfrak{h}$, $U \in \mathfrak{I}$, $X \in \mathfrak{m}$ имеем

$$[[U', U], X] = [U', [U, X]] + [U, [X, U']] = 0,$$

так как $[U, X] = 0$ и $[X, U'] \in \mathfrak{m}$. Для $Y \in \mathfrak{m}$, $U \in \mathfrak{I}$, $X \in \mathfrak{m}$ тривиальным образом выполняется равенство $[[Y, U], X] = 0$. Поэтому $\mathfrak{I}$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{h}$ и, следовательно, $\mathfrak{I} = (0)$.

Триплет $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ называется примарным, если он эффективен и удовлетворяет условию $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$.¹⁹⁾ Доказательство следующего аналога теоремы II.40 предоставляется читателю.

Теорема III.30. Имеется взаимно-однозначное соответствие между инфинитезимальными s -многообразиями $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ и примарными локально-регулярными s -триплетами $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$. Явно это соответствие описывается так:

(А) для данного многообразия $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ подалгебра $\mathfrak{h}$ есть подалгебра Ли алгебры $\text{End}(V)$, порождённая эндоморфизмами $R(X, Y)$, $X, Y \in V$, и $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$ (внешняя прямая сумма) с умножением, задаваемым формулами

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -\tilde{T}(X, Y) - \tilde{R}(X, Y), \\ [B, X] &= BX, \\ [B, C] &= BC - CB, \end{aligned} \quad \begin{aligned} X, Y &\in V, \\ B, C &\in \mathfrak{h}; \end{aligned}$$

наконец, $\nu = S \dot{+} \text{id}_{\mathfrak{h}}$, а $\mathfrak{M}$ отождествляется с V ;

(В) для заданного триплета $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ подпространство V есть $\mathfrak{M} = \mathfrak{g}_{1A}$, $S = \nu|_{\mathfrak{M}}$,

$$\tilde{R}(X, Y) = -\text{ad}([X, Y]_{\mathfrak{h}}), \quad \tilde{T}(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{M}}, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{M}.^{20)}$$

В случае надобности мы будем ссылаться на это биективное соответствие как на каноническое соответствие. Однако стоит подчеркнуть, что в нашем изложении понятие инфинитезимального s -многообразия всегда первично, а понятие локально регулярного s -триплета — лишь вторично.

ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ s -СТРУКТУР

Сейчас мы предложим конструкцию локально-регулярных s -многообразий, более общую, чем в предложении III.16. Эта конструкция принадлежит Леджеру и Грейму [GL2].

Теорема III.31. Пусть (M, ∇) — многообразие аффинной связности. Предположим, что существует тензорное поле S типа $(1, 1)$ на M , такое что

- (а) S и $I - S$ обратимы;
- (б) тензорные поля R , ∇R , T , ∇T , ∇S и $\nabla^2 S$ являются S -инвариантными.

Тогда существует единственная с точностью до симилиарности локально-регулярная s -структура $\{s_x\}$ на M , индуцирующая тензорное поле S и такая, что связность ∇ инвариантна относительно ростков всех s_x , $x \in M$.

Доказательство. Сначала установим некоторые леммы.

Лемма III.32. Пусть $(M, \{s_x\})$ — локально-регулярное s -многообразие, а ∇ — s_x -инвариантная аффинная связность на M . Если тензорное поле P является S -инвариантным и параллельным относительно ∇ , то оно s_x -инвариантно.

Доказательство. Каждое s_x есть локально-аффинное преобразование, так что оно сохраняет параллелизм. Далее, каждое s_x сохраняет тензорное поле P в точке x . Так как P параллельно, то оно инвариантно относительно s_x . (Ср. с доказательством предложения 0.28.) $\square$

Лемма III.33. Пусть ∇ и $\tilde{\nabla}$ — аффинные связности на M , такие что тензорное поле D , определённое соотношением $D_X Y = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$, удовлетворяет условию $\tilde{\nabla} D = 0$. Тогда для всех $X, Y \in \mathfrak{X}$

$$\tilde{T}(X, Y) = T(X, Y) + D_Y X - D_X Y, \quad (5)$$

$$\tilde{R}(X, Y) = R(X, Y) - [D_X, D_Y] - D_{\tilde{T}(X, Y)}. \quad (6)$$

Доказательство. Равенство (5) немедленно следует из определения T и $\tilde{T}$. Далее, $\tilde{\nabla} D = 0$ означает, что $\tilde{\nabla}_X D_Y - D_{\tilde{\nabla}_X Y} - D_Y \tilde{\nabla}_X = 0$, т.е. $[\tilde{\nabla}_X, D_Y] = D_{\tilde{\nabla}_X Y}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} [\nabla_X, \nabla_Y] &= [\tilde{\nabla}_X + D_X, \tilde{\nabla}_Y + D_Y] \\ &= [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] + [\tilde{\nabla}_X, D_Y] + [D_X, \tilde{\nabla}_Y] + [D_X, D_Y] \\ &= [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] + D_{\tilde{\nabla}_X Y} - D_{\tilde{\nabla}_Y X} + [D_X, D_Y] \\ &= [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] + D_{[X, Y]} + D_{\tilde{T}(X, Y)} + [D_X, D_Y]. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как

$$\nabla_{[X, Y]} = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} + D_{[X, Y]}, \quad (8)$$

мы получаем (6), вычитая (8) из (7). $\square$

Лемма III.34. Пусть (M, ∇) — многообразие аффинной связности, а S — тензорное поле типа $(1, 1)$, такое что S и $I - S$ обратимы. Пусть, далее, $\tilde{\nabla}$ — аффинная связность, определённая формулами

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - D_X Y, \quad D_X Y = (\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y). \quad (9)$$

Если P и ∇P суть S -инвариантные тензорные поля, то $\tilde{\nabla} P = 0$.

Доказательство. Пусть P — тензорное поле типа (p, q) . Предположим, что P и ∇P являются S -инвариантными. Тогда для линейных дифференциальных форм $\omega^1, \dots, \omega^p$ и векторных полей $X, X_1, \dots, X_q$ мы имеем

$$P(S^* \omega^1, \dots, S^* \omega^p, X_1, \dots, X_q) = P(\omega^1, \dots, \omega^p, SX_1, \dots, SX_q), \quad (10)$$

$$\nabla_X P(S^* \omega^1, \dots, S^* \omega^p, X_1, \dots, X_q) = (\nabla_{SX} P)(\omega^1, \dots, \omega^p, SX_1, \dots, SX_q). \quad (11)$$

Здесь S^* обозначает преобразование, транспонированное к S .

Ковариантным дифференцированием получаем из (10)

$$\begin{aligned} & (\nabla_X P)(S^* \omega^1, \dots, S^* \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ & \quad + \sum_{r=1}^p P(S^* \omega^1, \dots, (\nabla_X S^*) \omega^r, \dots, S^* \omega^p, X_1, \dots, X_q) \\ & = (\nabla_X P)(\omega^1, \dots, \omega^p, SX_1, \dots, SX_q) \\ & \quad + \sum_{r=1}^q P(\omega^1, \dots, \omega^p, SX_1, \dots, (\nabla_X S) X_r, \dots, SX_q). \quad (12) \end{aligned}$$

Определим тензорное поле $(\nabla_X S)S^{-1}$ типа $(1, 1)$ формулой

$$((\nabla_X S)S^{-1})Y = (\nabla_X S)(S^{-1}Y) \quad \text{для } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Для транспонированного оператора S^* , как легко видеть,

$$((\nabla_X S)S^{-1})^* = S^{*-1}(\nabla_X S^*).$$

Трактуя наше тензорное поле как дифференцирование алгебры всех тензорных полей на M , получаем из (10) — (12)

$$\begin{aligned} & (\nabla_{(I-S)X} P)(\omega^1, \dots, \omega^p, SX_1, \dots, SX_q) \\ & = ((\nabla_X S)S^{-1})P(\omega^1, \dots, \omega^p, SX_1, \dots, SX_q). \quad (13) \end{aligned}$$

Так как S и $I - S$ обратимы, то (13) эквивалентно равенству

$$\nabla_X P = ((\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)S^{-1})P.$$

Другими словами, мы получаем $\nabla_X P = D_X P$, т.е. $\tilde{\nabla} P = 0$. $\square$

Доказательство теоремы III.31. Локальные симметрии S_X должны быть локальными аффинными преобразованиями, удовлетворяющими начальным условиям, заданным касательными отображениями S_X . Отсюда следует утверждаемая единственность.

Для доказательства существования предположим, что $\tilde{V}$ есть связность, задаваемая условиями (9). Поскольку ∇S и $\nabla^2 S$ являются S -инвариантными, то, как легко видеть, D и ∇D тоже S -инвариантны. Согласно лемме III.34, имеем $\tilde{V}S = 0$, $\tilde{V}D = 0$, $\tilde{V}R = 0$, $\tilde{V}T = 0$. В частности, выполнены условия леммы III.33, и из (5) и (6) мы получаем $\tilde{V}\tilde{T} = 0$, $\tilde{V}\tilde{R} = 0$. Ясно также, что $\tilde{R}$ и $\tilde{T}$ будут S -инвариантны. Согласно III.16, существует единственное (с точностью до симильности) локально-регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$, имеющее $\tilde{V}$ канонической связностью, а S — касательным тензорным полем. Далее, тензорное поле D является S -инвариантным и параллельным относительно $\tilde{V}$; согласно III.32, оно s_x -инвариантно. Связность $\tilde{V}$ также s_x -инвариантна, и, значит, ∇ оказывается s_x -инвариантной. $\square\square$

РИМАНОВ СЛУЧАЙ

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Регулярная s -структура на (M, g) определяется как регулярная s -структура на M , для которой все симметрии являются изометриями. Аналогично мы определяем локальную регулярную s -структуру на (M, g) . Читатель легко проверит, что новые определения эквивалентны определениям 0.8 и 0.30 соответственно.

Тройка $(M, g, \{s_x\})$, где $\{s_x\}$ — (локальная) регулярная s -структура на (M, g) , называется римановым (локально-) регулярным s -многообразием.

Пусть $(M, g, \{s_x\})$ и $(M', g', \{s'_y\})$ — два римановых регулярных s -многообразия. Изоморфизм многообразия $(M, g, \{s_x\})$ на многообразие $(M', g', \{s'_y\})$ — это диффеоморфизм $\Phi: M \rightarrow M'$, такой что (i) Φ есть изометрия, (ii) Φ есть изоморфизм регулярных s -многообразий. Аналогично определяется локальный изоморфизм в локально-регулярном случае.

Предложения III.8 — III.10 легко модифицируются для риманова случая. Свойства канонической связности, соответствующие III.11 — III.14, уже были сформулированы в гл. 0. Предложение III.15 принимает следующий вид:

Предложение III.35. Диффеоморфизм $\Phi: M \rightarrow M'$ есть (локальный) изоморфизм римановых (локально-) регулярных s -многообразий, если и только если он является локальной изометрией, переводящей тензорное поле S в тензорное поле S' .

Доказательство аналогично доказательству предложения III.15; следует лишь заменить каноническую связность римановой метрикой. $\square$

Предложение III.36. Пусть $(M, \tilde{\nabla})$ и S те же, что и в предложении III.16, а q — риманова метрика на M , такая что $\tilde{\nabla}q = 0$, $S(q) = q$. Тогда тензорное поле S определяет единственную (с точностью до симилиарности) локальную регулярную s -структуру $\{s_x\}$ на (M, q) .

Доказательство. Единственность очевидна. Докажем существование. Согласно предложению III.16, имеется локально-регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$, соответствующее связности $\tilde{\nabla}$ и тензору S .

В силу III.32, q будет s_x -инвариантна, и, значит, структура $\{s_x\}$ риманова. $\square$

Пусть $(M, q, \{s_x\})$ — связное риманово локально-регулярное s -многообразие и $o \in M$ — фиксированная точка. Тогда q_o инвариантно относительно S_o и для любых $X, Y \in M_o$ мы имеем $\tilde{R}_o(X, Y)(q_o) = 0$. Поэтому можно ввести следующее определение:

Определение III.37. Риманово инфинитезимальное s -многообразие — это набор $(V, S_o, q_o, \tilde{R}_o, \tilde{T}_o)$, где V — векторное пространство, $S_o, \tilde{R}_o, \tilde{T}_o$ — тензоры типов $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$ соответственно, такие что выполнены условия (i) — (vi) из III.19, а q_o — скалярное произведение на V , такое что $S_o(q_o) = q_o$ и $\tilde{R}_o(X, Y)(q_o) = 0$ для любых $X, Y \in V$.

Инфинитезимальная модель риманова локально-регулярного s -многообразия определяется аналогично тому, как это делается в общем случае. Легко показать, что инфинитезимальная модель определяет связное риманово локально-регулярное s -многообразие однозначно с точностью до локального изоморфизма. Можно дать и другую алгебраическую характеристику:

Теорема III.38. Два связных римановых регулярных s -многообразия $(M, q, \{s_x\})$ и $(M', q', \{s'_y\})$ локально-изоморфны, если и только если по крайней мере для двух точек $p \in M$, $p' \in M'$ существует линейный изоморфизм $f: M_p \rightarrow M_{p'}$, такой что $f(q_p) = q'_{p'}$, $f(S_p) = S'_{p'}$, $f(\nabla S)_p = (\nabla S')_{p'}$, $f(R_p) = R'_{p'}$ (здесь ∇, ∇', R, R' обозначают римановы связности и поля тензоров римановой кривизны соответственно).

Доказательство. Часть "только если" тривиальна. Что касается "ес-

ли", то из наших начальных данных мы получаем последовательно

$$f(D_p) = D'_{p'}, \quad f(\tilde{T}_p) = \tilde{T}'_{p'}, \quad f(\tilde{K}_p) = \tilde{K}'_{p'}$$

(используя формулы (9), (5) и (6)). Следовательно, инфинитезимальные модели наших многообразий совпадают, откуда и следует утверждаемый результат. $\square$

Аналогично III.23 можно доказать, что всякий локальный изоморфизм связных односвязных римановых регулярных s -многообразий может быть продолжен до изоморфизма. Аналог предложения III.24 также имеет место. Далее, справедлива

Теорема III.39. Каждое риманово инфинитезимальное s -многообразие $(V, q_0, S_0, \tilde{K}_0, \tilde{T}_0)$ является инфинитезимальной моделью единственного связного и односвязного риманова регулярного s -многообразия $(M, q, \{s_x\})$.

Доказательство. Как видно из доказательства теоремы III.25, мы можем построить связное односвязное регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$, соответствующее инфинитезимальному s -многообразию $(V, S_0, \tilde{K}_0, \tilde{T}_0)$. Пусть $f: V \rightarrow M_x$ — линейный изоморфизм, отображающий $S_0, \tilde{T}_0, \tilde{K}_0$ в $S_x, \tilde{T}_x, \tilde{K}_x$ соответственно. Положим $q_x = f(q_0)$. Согласно предложению I.32, тензор q_x можно продолжить до параллельного тензорного поля q на M . Так как $S_0(q_0) = q_0$, $\tilde{\nabla} q = 0$, $\tilde{\nabla} S = 0$, то метрика q инвариантна относительно S на всём M . В силу III.32, она инвариантна относительно всех s_x , $x \in M$. Это завершает доказательство. $\square$

Теперь докажем риманову версию теоремы III.3I.

Теорема III.40. Пусть (M, q) — риманово многообразие. Предположим, что существует тензорное поле S типа $(1, 1)$ на M , такое что

- (a) $S - I$ обратимо;
- (b) тензорные поля $q, R, \nabla R, \nabla S$ и $\nabla^2 S$ являются S -инвариантными.

Тогда имеется локально-регулярная s -структура $\{s_x\}$ на (M, q) , индуцирующая S , и с точностью до симилиарности она единственна.

Доказательство. Так как S сохраняет риманову метрику q , то оно обратимо. Поэтому можно применить теорему III.3I к римановой связности ∇ . Мы получим локально-регулярную s -структуру $\{s_x\}$ на M , сохраняющую ∇ . Далее, q инвариантна и параллельна относительно ∇ , а значит, согласно III.32, s_x -инвариантна, что и завершает доказательство. $\square$

Отметим, что III.26 – III.28 справедливы также и для риманова случая.

Наконец, мы часто будем использовать в выкладках следующее

Предложение III.41. Пусть $(M, g, \{s_x\})$ – риманово локально-регулярное s -многообразие, а $D = \nabla - \tilde{\nabla}$ – тензор разности римановой и канонической связности. Тогда справедливо равенство

$$2g(D_Y, X, Z) = g(\tilde{T}(X, Y), Z) + g(\tilde{T}(X, Z), Y) + g(\tilde{T}(Y, Z), X). \quad (14)$$

Доказательство. Имеем $\nabla g = \tilde{\nabla} g = 0$. Поэтому $(D_X g)(Y, Z) = 0$ для всех X, Y, Z . С другой стороны, как нетрудно проверить, $D_Y X - D_X Y = \tilde{T}(X, Y)$. Отсюда легко следует (14). $\square$

Следствие III.42. Если $\tilde{T} \neq 0$, то риманово многообразие (M, g) – локально-симметрическое.

Доказательство. Из (14) вытекает, что $D = 0$, и, значит, $\nabla = \tilde{\nabla}$ удовлетворяет условиям $\nabla R = \tilde{\nabla} \tilde{R} = 0$. $\square$

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ-КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ

Начнём с одного общего результата о тензорных полях.

Предложение III.43. Пусть $(M, \{s_x\})$ – связное локально-регулярное s -многообразие, а $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – его инфинитезимальная модель. Существует взаимно-однозначное соответствие между тензорными полями на M , инвариантными относительно локальных автоморфизмов многообразия $(M, \{s_x\})$, и тензорами на V , инвариантными относительно автоморфизмов модели $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$.

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь точку $0 \in M$ и отождествим V с M_0 . Для любого инвариантного тензорного поля F на M возьмём его значение F_0 на M_0 . Очевидно, F_0 инвариантно относительно автоморфизмов пространства $(M_0, S_0, \tilde{R}_0, \tilde{T}_0)$ (см. замечание после III.22).

Обратно, пусть F_0 – инвариантный тензор на M_0 . Для каждого $x \in M$ пусть $f_x : M_0 \rightarrow M_x$ – некоторый фиксированный инфинитезимальный изоморфизм. Положим $F_x = f_x(F_0)$. Мы получаем тензорное поле F , которое не зависит от выбора f_x , $x \in M$. Оно параллельно относительно $\tilde{\nabla}$. Действительно, параллельный перенос вдоль любой кривой $\widehat{0x}$ из M индуцирует инфинитезимальный изоморфизм $f_x : M_0 \rightarrow M_x$, так что F_x есть результат параллельного переноса

са тензора F_0 . Мы заключаем, что каждый инфинитезимальный изоморфизм $f_{x,y} : M_x \rightarrow M_y$ сохраняет F и $\tilde{V}F = 0$. Тем же способом, что и в доказательстве III.32, получаем, что F инвариантно на M . $\square$

Определение III.44. Тензорное поле на локально-регулярном s -многообразии $(M, \{s_x\})$ называется инвариантным, если оно инвариантно относительно всех локальных автоморфизмов.

Согласно предложению III.43, все инвариантные почти-комплексные структуры на $(M, \{s_x\})$ могут быть построены при помощи инвариантных комплексных структур на векторном пространстве V . Мы дадим сейчас достаточные условия существования таких структур.

Предложение III.45. Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – инфинитезимальная модель многообразия $(M, \{s_x\})$, $\dim M = 2m$, и пусть $K \subset GL(V)$ – централизатор для S . Тогда каждая комплексная структура J на V , принадлежащая центру K , определяет инвариантную почти-комплексную структуру на $(M, \{s_x\})$.

Доказательство. Ясно, что $K \supset \text{Aut}(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$, а J K -инвариантно. $\square$

Предложение III.46. Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – инфинитезимальная модель многообразия $(M, \{s_x\})$, $\dim M = 2m$. Допустим, что: (i) преобразование S полупросто; (ii) все собственные числа преобразования S мнимы. Тогда на $(M, \{s_x\})$ существует по крайней мере одна инвариантная почти-комплексная структура.

Доказательство. Пусть $\theta_i, \bar{\theta}_i$, $i = 1, \dots, r$, – различные собственные числа преобразования S . Тогда комплексификация $V^c = V \otimes \mathbb{C}$ может быть разложена в прямую сумму комплексных собственных подпространств:

$$V^c = \sum_{i=1}^r (W_i + \bar{W}_i).$$

Так как S полупросто, то все элементы любого собственного подпространства суть собственные векторы преобразования S . Для $Z \in (W_1 + \dots + W_r)$ положим $J(Z) = \sqrt{-1} \cdot Z$ и $J(\bar{Z}) = -\sqrt{-1} \cdot \bar{Z}$. Ясно, что J есть комплексная структура на V^c , которая представляет собой продолжение комплексной структуры на V . Далее, если $A \in K$ продолжено до преобразования пространства V^c , то равенство $A \circ S = S \circ A$ означает, что $A(W_i) \subset W_i$, $A(\bar{W}_i) \subset \bar{W}_i$ для всех $i = 1, \dots, r$. Отсюда $A \circ J = J \circ A$, и наш результат следует из предложения III.45. $\square$

Замечание III.47. Пусть $\theta_i = \rho_i (\cos t_i + \sqrt{-1} \cdot \sin t_i)$, $i = 1, \dots, r$. Тогда комплексная структура J из доказательства предложения III.46 задаётся на каждом вещественном собственном подпространстве $V_i = V \cap (W_i + \bar{W}_i)$ формулой

$$J|_{V_i} = [S - (\rho_i \cos t_i)I] / \rho_i \sin t_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Ясно, что наша конструкция зависит от того, как (в каком порядке) мы обозначаем собственные числа через θ_i и $\bar{\theta}_i$, $i = 1, \dots, r$ (2^r возможностей).

Из предложения III.46 вытекает

Теорема III.48. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное локально-регулярное s -многообразие, такое что $\{s_x\}$ имеет нечётный порядок: $(s_x)^{2k+1} = \text{id}$ для $x \in M$. Тогда на $(M, \{s_x\})$ существует инвариантная почти-комплексная структура.

Доказательство. Так как $S^{2k+1} = I$, то S сохраняет положительно-определённые скалярные произведения на V и, значит, полупросто. Далее, собственные числа преобразования S суть комплексные числа модуля 1, отличные от 1 и -1 , и, следовательно, они имеют отличную от нуля мнимую часть. Кроме того, $\dim V = 2m$. $\square$

Рассмотрим теперь риманово локально-регулярное s -многообразие $(M, g, \{s_x\})$ с инфинитезимальной моделью $(V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Тогда S — полупростое преобразование на V , а g определяет эрмитово скалярное произведение h на комплексификации V^c . Допустим, что все собственные числа преобразования S имеют отличную от нуля мнимую часть (т.е. представляют собой комплексные числа модуля 1, отличные от 1 и -1).

Разложение пространства V^c на комплексные собственные подпространства преобразования S является ортогональным относительно h . Отсюда следует, что это эрмитово скалярное произведение инвариантно относительно комплексной структуры J на V^c , построенной способом из доказательства III.46. Далее, J порождает инвариантную почти-эрмитову структуру на M (здесь имеется в виду инвариантность относительно всех локальных римановых автоморфизмов многообразия $(M, g, \{s_x\})$). Резюмируем:

Теорема III.49. Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — связное риманово локально-регулярное s -многообразие чётной размерности, такое что $S + I$ — невырожденное преобразование. Тогда на $(M, g, \{s_x\})$ существует по крайней мере одна инвариантная почти-эрмитова структура.

При рассмотрении почти-комплексных структур обычно ставится вопрос их интегрируемости. В нашей ситуации имеется следующий простой критерий:

Предложение III.50. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное локально-регулярное s -многообразие, а $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель, $\dim V = 2m$. Пусть J — комплексная структура на V , инвариантная относительно всех автоморфизмов модели $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$. Тогда J индуцирует инвариантную комплексную структуру на $(M, \{s_x\})$, если и только если

$$\tilde{T}(JX, JY) - J\tilde{T}(X, JY) - J\tilde{T}(JX, Y) - \tilde{T}(X, Y) = 0 \quad (15)$$

для всех $X, Y \in V$.

Доказательство. Обозначим инвариантную почти-комплексную структуру на M тем же символом J . Напомним определение тензора Нейенхёйса:

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y].$$

Ясно, что $[X, Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - \tilde{T}(X, Y)$ для любых двух векторных полей X, Y на M . Применяя эту формулу ко всем членам выражения $N(X, Y)$ и используя соотношение $\tilde{\nabla}J = 0$, легко видим, что равенство (15) эквивалентно равенству $N(X, Y) = 0$. $\square$

Следствие III.51. Если локально-регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ удовлетворяет условию $\tilde{T} = 0$, то каждая инвариантная почти-комплексная структура на $(M, \{s_x\})$ интегрируема.

В римановом случае нас интересует существование кэлеровых структур.

Предложение III.52. Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — связное риманово локально-регулярное s -многообразие, $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель, $\dim V = 2m$. Пусть J — комплексная структура на V , сохраняющая метрику и инвариантная относительно всех инфинитезимальных автоморфизмов. Тогда J индуцирует инвариантную кэлерову структуру на $(M, g, \{s_x\})$, если и только если $DJ = 0$, где D — тензор на V , определённый формулой (14) из предложения III.41.

Доказательство. Имея дело с инвариантным тензором на V , мы, как обычно, обозначаем тем же самым символом и соответствующее ему $\tilde{\nabla}$ -параллельное тензорное поле на M . При этом соглашении тензоры D и J определяют тензорное поле разности $\nabla - \tilde{\nabla}$ и почти-эрмитову

структуру J на M соответственно. Соотношение $DJ = 0$ на V при помощи $\tilde{V}$ -параллелизма продолжается на всё многообразие M . Следовательно, $DJ = 0$ на V , если и только если $\nabla J = 0$ на M . Итак, $DJ = 0 \iff (M, g, J)$ калерово. $\square$

Пример III.53. Рассмотрим римановы регулярные s -многообразия порядка 3 и размерности 4 из гл. VI (см. теорему VI.3 и её доказательство). Каждое из этих пространств определяется некоторым инфинитезимальным s -многообразием $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$, где V есть 4-мерное векторное пространство, а $g, S, \tilde{R}, \tilde{T}$ задаются с точностью до изоморфизма следующим образом: S допускает ортогональный базис собственных комплексных векторов $\{U_1, U_2, \bar{U}_1, \bar{U}_2\}$, такой что

$$\|U_1\| = 1, \|U_2\| = 1/\rho, \quad \tilde{T}(U_1, U_2) = \bar{U}_1, \quad \tilde{T}(U_j, \bar{U}_k) = 0,$$

$$\tilde{R}(U_2, \bar{U}_2)U_1 = U_1, \quad \tilde{R}(U_2, \bar{U}_2)\bar{U}_1 = -\bar{U}_1,$$

$$\tilde{R}(U_2, \bar{U}_2)U_2 = -2U_2, \quad \tilde{R}(U_2, \bar{U}_2)\bar{U}_2 = 2\bar{U}_2$$

и $\tilde{R}(Z, Z') = 0$ для всех других пар собственных векторов.

Разложение на собственные подпространства преобразования S имеет вид

$$V^c = (U_1, U_2) \dot{+} (\bar{U}_1, \bar{U}_2)^{21})$$

($S^2 + S + I = 0$). Сначала введём комплексную структуру J на V^c "стандартным" образом, описанным в III.46:

$$J(U_i) = \sqrt{-1} \cdot U_i, \quad J(\bar{U}_i) = -\sqrt{-1} \cdot \bar{U}_i.$$

Критерий (15) показывает, что соответствующая инвариантная почти-эрмитова структура не является интегрируемой.

С другой стороны, $\tilde{T}$ отображает $V^c \times V^c$ на подпространство $(U_1, \bar{U}_1)$ пространства V^c . Поэтому $(U_1, \bar{U}_1)$, а также его ортогональное дополнение $(U_2, \bar{U}_2)$ суть подпространства в V^c , инвариантные относительно всех инфинитезимальных автоморфизмов. Таким образом, можно определить новую инвариантную комплексную структуру J' на V^c равенствами

$$J'(U_1) = \sqrt{-1} \cdot U_1, \quad J'(U_2) = -\sqrt{-1} \cdot U_2,$$

$$J'(\bar{U}_1) = -\sqrt{-1} \cdot \bar{U}_1, \quad J'(\bar{U}_2) = \sqrt{-1} \cdot \bar{U}_2.$$

Из (14) легко следует, что подпространства $(U_1, \bar{U}_2)$, $(\bar{U}_1, U_2)$ инвариантны относительно дифференцирования D и, значит, $DJ' = 0$. Следовательно, J' порождает инвариантную калерову структуру.

Аналогично следствию III.51, мы получаем из III.52 и (14) следующий результат:

Следствие III.54. Если риманово локально-регулярное s -многообразие $(M, g, \{s_x\})$ удовлетворяет условию $\tilde{T} = 0$, то каждая инвариантная почти-эрмитова структура на $(M, g, \{s_x\})$ кэлерова.

Пример III.53 показывает, что инвариантные почти-эрмитовы структуры могут оказаться кэлеровыми, даже если $\tilde{T} \neq 0$.

Замечание III.55. Можно также ввести понятие слабо инвариантного тензорного поля как такого поля, которое инвариантно относительно всех локальных симметрий, но не обязательно инвариантно относительно всех локальных автоморфизмов. Например, эрмитова структура эрмитова симметрического пространства слабо инвариантна, но не инвариантна в смысле определения III.44 (см. $[KH2]'$).

Если $(M, \{s_x\})$ — связное односвязное регулярное s -многообразие, а $(V, \mathcal{S}, \tilde{K}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель, то слабо инвариантные тензорные поля на M соответствуют тензорам на V , которые инвариантны относительно $\mathcal{S}$ и всех эндоморфизмов (действующих как дифференцирования) $\tilde{K}(X, Y)$, $X, Y \in V$.

Замечание III.56. Леджер и Петтит $[LP2]$ классифицировали все римановы регулярные s -многообразия $(M, g, \{s_x\})$ с интегрируемым тензорным полем $\mathcal{S}$. (Тензорное поле $\mathcal{S}$ типа $(1, 1)$ называется интегрируемым, если обобщённый тензор Нейенхёйса

$$N_{\mathcal{S}}(X, Y) = \mathcal{S}^2[X, Y] - \mathcal{S}[\mathcal{S}X, Y] - \mathcal{S}[X, \mathcal{S}Y] + [\mathcal{S}X, \mathcal{S}Y]$$

равен нулю.) Пусть $(M, \{s_x\})$ — локально-регулярное s -многообразие. С помощью метода, подобного тому, который был применён при доказательстве предложения III.50, можно показать, что $N_{\mathcal{S}}(X, Y) = 0$, если и только если $\mathcal{S}(I - \mathcal{S})\tilde{T}(X, Y) = 0$. (Здесь мы можем использовать дополнительное свойство $\mathcal{S}(\tilde{T}) = \tilde{T}$, которое для произвольной комплексной структуры J , вообще говоря, не выполняется.) Итак, $\mathcal{S}$ интегрируемо, если и только если $\tilde{T} = 0$. Мы вернёмся к этому вопросу в следующей главе.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТЕОРЕМА АМБРОУЗА — СИНТЕРА*)

Как хорошо известно, Э. Картан доказал, что связное односвязное полное риманово многообразие является симметрическим простран-

*) Добавлено автором для русского издания.

ством, если и только если ковариантная производная поля тензора кривизны равна нулю. Амброуз и Сингер [AS][†] обобщили этот классический результат и охарактеризовали однородность риманова многообразия некоторыми условиями на ковариантную производную тензора кривизны и некий дополнительный тензор типа $(1, 2)$ (который в симметрическом случае тривиален). Оригинальное доказательство (в [AS]) написано в довольно-таки классическом духе и читается нелегко. Более элегантное доказательство было предложено Костантом [Ко][†]. Здесь мы дадим очень короткое доказательство, которое естественно вытекает из развитой выше теории и некоторых стандартных теорем, приведённых в приложении В (и не слишком отличается от доказательства Костанта).

Теорема Амброуза – Сингера. А) Пусть (M, g) – однородное риманово многообразие (т.е. риманово многообразие, допускающее транзитивную группу изометрий). Тогда на M существует тензорное поле D типа $(1, 2)$, такое что для любого вектора $X \in T(M)$

- (i) $D(X) = D(X, \cdot)$ есть кососимметричный эндоморфизм;
- (ii) $\nabla_X R = D(X) \cdot R$;
- (iii) $\nabla_X D = D(X) \cdot D$,

где ∇, R обозначают соответственно связность Леви-Чивиты и тензорное поле кривизны на (M, g) .

В) Пусть (M, g) – связное односвязное полное риманово многообразие класса C^∞ . Предположим, что на нём существует тензорное поле D типа $(1, 2)$, удовлетворяющее условиям (i) – (iii). Тогда (M, g) однородно.

Доказательство. А) Пусть (M, g) – однородное риманово многообразие. Тогда группа изометрий $G = I^0(M)$ действует на нём транзитивно. Пусть H – подгруппа изотропии группы G в некоторой точке $o \in M$, так что $M = G/H$. Обозначим через $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно. Так как H компактна, то на $\mathfrak{g}$ существует положительно-определённое скалярное произведение B , инвариантное относительно действия группы $\text{ad}_G(H)$. Пусть $\mathfrak{m}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно B . Пространство G/H будет, очевидно, редуктивным относительно разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Обозначим через $\tilde{\nabla}$ его каноническую связность. Так как связности ∇ и $\tilde{\nabla}$ обе G -инвариантны, то поле тензора разности $D = \nabla - \tilde{\nabla}$ тоже G -инвариантно. Но согласно предложению I.11 каждое G -инвариантное тензорное поле параллельно относительно связности $\tilde{\nabla}$. Следовательно, $\tilde{\nabla} R = 0$, $\tilde{\nabla} D = 0$, а также $Dg = -\tilde{\nabla}g = 0$. Но

это не что иное, как условия (ii), (iii), (i) соответственно.

В) Пусть D — тензорное поле на (M, g) , удовлетворяющее условиям (i) — (iii). Определим аффинную связность $\tilde{\nabla}$ на M формулой $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - D(X)Y$. Условия (i) — (iii) можно переписать в виде $\tilde{\nabla}g = \tilde{\nabla}R = \tilde{\nabla}D = 0$. Далее, используя формулы (5) и (6) из леммы III.33, получаем последовательно $\tilde{\nabla}\tilde{T} = 0$ и $\tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$. Согласно B6, аффинное многообразие $(M, \tilde{\nabla})$ аналитично. А так как $\tilde{\nabla}g = 0$, то риманово многообразие (M, g) тоже аналитично. Теперь покажем, что для любых двух точек $x, y \in M$ существует изометрия f многообразия (M, g) , такая что $f(x) = y$. Пусть F — линейный изоморфизм $T_x(M)$ на $T_y(M)$, определённый параллельным переносом h_γ (относительно $\tilde{\nabla}$) вдоль какой-нибудь кусочно-гладкой кривой γ , соединяющей точку x с точкой y . Так как $\tilde{R}$, $\tilde{T}$, g параллельны относительно $\tilde{\nabla}$, то F отображает тензоры $\tilde{R}_x$, $\tilde{T}_x$, g_x в $\tilde{R}_y$, $\tilde{T}_y$, g_y соответственно. Согласно B7, существует аффинный изоморфизм f некоторой нормальной окрестности U_x на некоторую нормальную окрестность U_y в $(M, \tilde{\nabla})$, такой что $f_{*x} = F$. Кроме того, $f_{*x}(g_x) = g_y$. Поскольку f сохраняет параллельный перенос относительно $\tilde{\nabla}$ и $\tilde{\nabla}g = 0$, мы легко видим, что f — локальная изометрия пространства (M, g) . $\square$

По поводу приложений и дальнейших результатов, связанных с теоремой Амброуза — Сингера, см. $[Si]^+$, $[Se1]^+$, $[TrV]^+$.

Литература: $[Ф1-3]'$, $[GL2]$, $[K1]$, $[K3]$, $[KL]$, $[L0]$, $[LP2]$, $[Lo1]$, $[WoG]$.

Глава IV

Операции с s-многообразиями

ПОДМНОГООБРАЗИЯ И СЛОЕНИЯ

Пусть (M, ∇) — многообразие аффинной связности. Говорят, что подмногообразие $N \subset M$ автопараллельно, если для каждой кривой $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ и каждого касательного вектора $u \in N_{\gamma(0)}$ параллельное перенесение u вдоль γ оставляет вектор касательным к N , т.е. $h_\gamma u \in N_{\gamma(1)}$ (см. [KH2]).

Если $N \subset M$ автопараллельно, то связность ∇ на M индуцирует связность ∇^N на N следующим, естественным, образом: для $p \in N$, $u \in T_p(N)$, $Y \in \mathcal{X}(N)$ полагаем $\nabla_u^N Y = \nabla_u \tilde{Y}$, где $\tilde{Y}$ — любое продолжение поля Y с некоторой окрестности точки p в N на некоторую её окрестность в M .

Определение IV.1. Пусть $(M, \{s_x\})$ — регулярное s-многообразие. Подмногообразие $N \subset M$ называется инвариантным, если для любых двух точек $p, q \in N$ и каждого локального автоморфизма φ многообразия M , такого что $\varphi(p) = q$, мы имеем $\varphi(N \cap \varphi^{-1}(M)) \subset N$.

Предложение IV.2. Всякое инвариантное подмногообразие $N \subset M$ автопараллельно относительно канонической связности ∇ многообразия $(M, \{s_x\})$.

Доказательство. Пусть $N \subset M$ — подмногообразие, инвариантное относительно всех локальных автоморфизмов, $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ — кривая в N , а $h_\gamma : M_{\gamma(0)} \rightarrow M_{\gamma(1)}$ — параллельный перенос вдоль γ . Существует трансвекция $q \in \text{Tr}(M, \{s_x\})$, такая что $q(\gamma(0)) = \gamma(1)$ и $q_* = h_\gamma$ на $M_{\gamma(0)}$ (см. теорему II.32). Так как N инвариантно, мы получаем $q_*(N_{\gamma(0)}) = N_{\gamma(1)}$, откуда $h_\gamma N_{\gamma(0)} = N_{\gamma(1)}$. $\square$

Предложение IV.3. Пусть $N \subset M$ — инвариантное подмногообразие в $(M, \{s_x\})$. Тогда N_x естественным образом наделяется

структурой регулярного s -многообразия $(N, \{s_y|_N\})$ и его каноническая связность совпадает с индуцированной связностью $\tilde{\nabla}^N$.

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\nabla}^N$ инвариантна относительно всех $s_y|_N$, $y \in N$, и $\tilde{\nabla}^N(S|_N) = 0$. Теперь применяем утверждение о единственности из части (A) теоремы II.4. $\square$

Пара $(N, \{s_y|_N\})$ называется инвариантным подмногообразием многообразия $(M, \{s_x\})$.

Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — инфинитезимальное s -многообразие. Инфинитезимальное s -многообразие $(W, S', \tilde{R}', \tilde{T}')$ называется подмногообразием в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$, если $W \subset V$, $S' = S|_W$, $\tilde{R}' = \tilde{R}|_W$, $\tilde{T}' = \tilde{T}|_W$. Заметим, что каждое подмногообразие в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ однозначно определяется подпространством $W \subset V$, таким что

$$S(W) \subset W, \tilde{R}(W, W)W \subset W, \tilde{T}(W, W) \subset W. \quad (2.2)$$

Далее, говорят, что подпространство $W \subset V$ (соотв. подмногообразие $(W, S', \tilde{R}', \tilde{T}')$ инфинитезимального многообразия $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$) инвариантно, если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов пространства $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$.

Предложение IV.4. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие, а $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель. Если $(N, \{s_y|_N\})$ — инвариантное подмногообразие в $(M, \{s_x\})$, то его инфинитезимальная модель каноническим образом является инвариантным подмногообразием $(W, S', \tilde{R}', \tilde{T}')$ многообразия $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$.

Доказательство. Выберем $p \in N \subset M$ и положим $V = T_p(M)$, $W = T_p(N)$. В силу предложения IV.3, $(W, S'_p, \tilde{R}'_p, \tilde{T}'_p)$ есть подмногообразие в $(V, S_p, \tilde{R}_p, \tilde{T}_p)$, и инвариантность подпространства $W \subset V$ следует из инвариантности подмногообразия $N \subset M$ в точке p . Наше утверждение об инфинитезимальной модели вытекает теперь из инвариантности $W \subset V$. $\square$

Теорема IV.5. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие, а $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель. Пусть $(W, S', \tilde{R}', \tilde{T}')$ — m -мерное инвариантное подмногообразие в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$. Тогда на M существует m -мерное инволютивное распределение Δ , максимальные интегральные многообразия которого суть инвариантные подмногообразия многообразия $(M, \{s_x\})$ с инфинитезимальной моделью $(W, S', \tilde{R}', \tilde{T}')$.

Доказательство. Определим распределение Δ так: для каждого $p \in M$

выберем какой-нибудь изоморфизм $f: (V, S, \tilde{R}, \tilde{T}) \rightarrow (M_p, S_p, \tilde{R}_p, \tilde{T}_p)$ и положим $\Delta_p = f(W)$. Ясно, что Δ инвариантно относительно всех локальных автоморфизмов многообразия $(M, \{s_x\})$. Далее, параллельный перенос вдоль $\delta = \overline{p q}$ относительно связности $\tilde{\nabla}$ индуцируется трансвекцией φ , такой что $\varphi(p) = q$. Так как каждая трансвекция является автоморфизмом, то φ_* преобразует Δ_p в Δ_q , а значит, Δ_q есть результат параллельного переноса подпространства Δ_p вдоль δ . Мы заключаем, что распределение Δ параллельно относительно связности $\tilde{\nabla}$. Пусть теперь X, Y — два локальных векторных поля на M , принадлежащих распределению Δ . Тогда $[X, Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - \tilde{T}(X, Y)$. Здесь $\tilde{\nabla}_X Y$ и $\tilde{\nabla}_Y X$ принадлежат Δ , так как Δ параллельно, а $\tilde{T}(X, Y)$ принадлежит Δ , так как W есть подмногообразие в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$. Итак, $[X, Y]$ принадлежит Δ , и Δ инволютивно. Максимальные интегральные подмногообразия, очевидно, инвариантны. $\square$

Замечание IV.6. Множество всех максимальных интегральных подмногообразий распределения Δ будем называть слоением, соответствующим $(W, S', \tilde{R}', \tilde{T}')$.

Теперь рассмотрим риманов случай. Если трактовать понятия "автоморфизм", "регулярное s -многообразие", "инфинитезимальное s -многообразие" и т.д. в римановом смысле, то имеют место точные аналоги предложений IV.3, IV.4 и теоремы IV.5. Теорему IV.5 можно дополнить следующим образом:

Следствие IV.7. Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — связное риманово регулярное s -многообразие, а $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель. Тогда каждое m -мерное инвариантное подмногообразие $(W, g', S', \tilde{R}', \tilde{T}')$ многообразия $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ определяет слоение многообразия (M, g) на m -мерные подмногообразия, которые являются обобщёнными симметрическими римановыми пространствами.

Вообще говоря, слои могут быть, а могут и не быть вполне геодезическими подмногообразиями в (M, g) . Справедлив следующий критерий:

Предложение IV.8. Пусть $\mathcal{F}$ — слоение многообразия (M, g) на m -мерные слои, как в следствии IV.7. Это слоение является вполне геодезическим, если и только если для любых $X \in W$, $Z \in W^\perp$ мы имеем $g(\tilde{T}(X, Z), X) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим $D = V - \tilde{\nabla}$ — тензор разности между римановой и канонической связностью на M . Слой $N \in \mathcal{F}$ будет впо-

дне геодезическим в (M, g) , если и только если для любых двух векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}$ мы имеем $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(N)$. Так как N всегда autoparallelно относительно канонической связности $\tilde{\nabla}$, то $\tilde{\nabla}_X Y \in \mathfrak{X}(N)$. Следовательно, N является вполне геодезическим, если и только если $D_X Y \in \mathfrak{X}(N)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$. Отождествляя W с касательным пространством N_p , мы получаем отсюда условие $D_X Y \in W$ для $X, Y \in W$. Обратно, если $D_X Y \in W$ для $X, Y \in W$, то инвариантное распределение Δ на M , определённое подпространством W , обладает тем свойством, что если X, Y принадлежат Δ , то $D_X Y$ тоже принадлежит Δ . Отсюда видно, что все слои вполне геодезические.

Указанное выше алгебраическое условие можно теперь свести к следующему: $D_X X \in W$ для каждого $X \in W$. Действительно, для $X, Y \in W$ мы имеем

$$D_X Y + D_Y X = D_{X+Y}(X+Y) - D_X X - D_Y Y \in W$$

и $D_X Y - D_Y X = \tilde{T}(X, Y) \in W$, так как W есть подмногообразие в $(V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Наконец, из формулы (14) предложения III.41 вытекает, что $g(D_X X, Z) = g(\tilde{T}(X, Z), X)$ тождественно. Отсюда при $X \in W$, $Z \in W^\perp$ и получается наше условие. $\square$

Пример IV.9a. Рассмотрим трёхмерный пример из гл. 0:

$$M = \mathbb{R}^3[a, b, c], \quad ds^2 = e^{2c} da^2 + e^{-2c} db^2 + \lambda^2 dc^2,$$

а типичная симметрия в точке o имеет вид $a' = -b$, $b' = a$, $c' = -c$. Соответствующее инфинитезимальное s-многообразие есть $(V, g, A, \tilde{K}, \tilde{T})$, где V имеет ортогональный базис $\{X, Y, Z\}$, такой что $\|X\| = \|Y\| = 1$, $\|Z\| = \lambda$; далее,

$$\tilde{K} = 0, \quad \tilde{T}(X, Y) = 0, \quad \tilde{T}(X, Z) = -X, \quad \tilde{T}(Y, Z) = Y,$$

а A задаётся формулами $A \cdot X = -Y$, $A \cdot Y = X$, $A \cdot Z = -Z$. Здесь $W = (X, Y)^{(23)}$ — инвариантное подмногообразие. Соответствующее двумерное слоение многообразия M образовано поверхностями $c = \text{const}$, слоями служат здесь эвклидовы плоскости. Это слоение не является вполне геодезическим.

Пример IV.9b. Рассмотрим 4-мерный пример III.53. Здесь $(U_1, \bar{U}_1)$ и $(U_2, \bar{U}_2)$ суть инвариантные подмногообразия в $(V^c, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Таким образом, мы получаем два взаимно дополнительных слоения $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Представляя наше пространство как $\mathbb{R}^4[x, y, u, v]$ с метрикой, заданной в VI.3, мы видим, что $\mathfrak{F}_1$ состоит из поверхностей $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, а $\mathfrak{F}_2$ — из поверхностей $u = \text{const}$, $v =$

const . У слоения $\mathcal{F}_1$ слои суть эвклидовы плоскости, а у $\mathcal{F}_2$ — гиперболические плоскости. Наконец, $\mathcal{F}_2$ является вполне геодезическим, а $\mathcal{F}_1$ нет.

IV.10. По аналогии с III.55 можно определить слабую инвариантность так: подмногообразие $N \in (M, \{s_x\})$ называется слабо инвариантным, если оно инвариантно относительно всех симметрий s_x . Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — инфинитезимальная модель многообразия $(M, \{s_x\})$, а $(G, H, \mathcal{B})$ — соответствующее примарное регулярное S -многообразие. Тогда говорят, что подпространство $W \subset V$ слабо инвариантно относительно $(M, \{s_x\})$, если оно инвариантно относительно S и группы $\text{ad}(H)$, действующей на V . Наконец, W называют слабо инвариантным, если оно инвариантно относительно S и всех эндоморфизмов $\tilde{R}(X, Y)$, $X, Y \in V$. Все предыдущие результаты этого параграфа остаются справедливыми, если заменить "инвариантный" на "слабо инвариантный относительно $(M, \{s_x\})$ " или, для случая односвязного $(M, \{s_x\})$, на "слабо инвариантный".

Предостережение. Инволютивное распределение Δ на $(M, \{s_x\})$, построенное для слабо инвариантного $W \subset V$, в общем случае не единственно. Всякое такое распределение может быть получено следующим образом. Выбираем какую-нибудь точку $p \in M$ и изоморфизм $f: (V, S, \tilde{R}, \tilde{T}) \rightarrow (M_p, S_p, \tilde{R}_p, \tilde{T}_p)$ и полагаем $\Delta_p = f(W)$. Тогда Δ_p определяет единственное $\tilde{V}$ -параллельное распределение Δ . Читатель легко проверит, что Δ слабо инвариантно.

Пример IV.11. Рассмотрим 5-мерное обобщённое симметрическое пространство порядка 4, заданное как $\mathbb{R}^5[u, v, x, y, z]$ с метрикой

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dx^2 + dy^2 + \rho^2(udx + vdy - dz)^2,$$

$\rho > 0$ (см. теорему VI.5, тип I). Типичная симметрия в начале задаётся соотношениями

$$u' = -v, v' = u, x' = y, y' = -x, z' = -z.$$

Соответствующая инфинитезимальная модель $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ может быть определена так: V порождается ортогональным базисом $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, W\}$, где $\|X_j\| = \|Y_j\| = 1$, $\|W\| = \rho$, $\tilde{T}(X_1, X_2) = -\tilde{T}(Y_1, Y_2) = W$, $\tilde{T}(Z, Z') = 0$ для остальных пар базисных векторов $\tilde{R} = 0$,

$$SX_1 = -Y_1, SY_1 = X_1, SX_2 = Y_2, SY_2 = -X_2, SW = -W.$$

Все подпространства (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (W) ²⁴⁾ слабо инвариан-

тны. Соответствующие слоения задаются так:

$$\mathcal{F}_1: x, y, z = \text{const}, \mathcal{F}_2: u, v, z = \text{const}, \mathcal{F}_3: x, y, u, v = \text{const}.$$

Слоями слоений $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ служат эвклидовы вполне геодезические плоскости, расслоение $\mathcal{F}_3$ состоит из геодезических линий. Тем не менее пространство $(\mathbb{R}^5, q)$ неприводимо.

РАЗЛОЖЕНИЕ s -МНОГООБРАЗИЙ

Определение IV.12. Регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ называется прямым произведением регулярных s -многообразий $(M_1, \{s_u^1\})$, $(M_2, \{s_v^2\})$, если многообразие M диффеоморфно многообразию $M_1 \times M_2$ и (после отождествления M с $M_1 \times M_2$ при помощи соответствующего диффеоморфизма)

$$s_{(u,v)}(p, q) = (s_u^1(p), s_v^2(q)) \text{ для любых } (u, v), (p, q) \in M. \quad (25)$$

Многообразие $(M, \{s_x\})$ называют приводимым или неприводимым в соответствии с тем, представимо оно в виде прямого произведения (нетривиального) или нет.

Предложение IV.13. Пусть $(M, \{s_x\}) = (M_1, \{s_u^1\}) \times (M_2, \{s_v^2\})$. Обозначим через $\tilde{V}$, $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ канонические связности на M, M_1, M_2 соответственно. Тогда $(M, \tilde{V}) = (M_1, \tilde{V}_1) \times (M_2, \tilde{V}_2)$ (прямое произведение пространств аффинной связности). Далее,

$$\text{Tr}(M, \{s_x\}) = \text{Tr}(M_1, \{s_u^1\}) \times \text{Tr}(M_2, \{s_v^2\})$$

(прямое произведение групп Ли).

Доказательство. Тем же способом, что и в доказательстве предложения IV.3, можно показать, что произведение связностей $\tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$ на 1 будет канонической связностью. Последнее утверждение очевидным образом следует из определений. $\square$

Определение IV.14. Инфинитезимальное s -многообразие $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ называется прямой суммой инфинитезимальных s -многообразий $(V_i, S_i, \tilde{R}_i, \tilde{T}_i)$, $i = 1, 2$, если $V = V_1 \dot{+} V_2$ (прямая сумма), $S(X) = \sum_{i=1}^2 S_i(\pi_i X)$,

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \sum_{i=1}^2 \tilde{R}_i(\pi_i X, \pi_i Y)\pi_i Z, \quad \tilde{T}(X, Y) = \sum_{i=1}^2 \tilde{T}_i(\pi_i X, \pi_i Y),$$

где $\pi_i: V \rightarrow V_i$ — проекции. Инфинитезимальное s -многообразие называется приводимым или неприводимым в соответствии с тем, представимо оно в виде прямой суммы (нетривиальной) или нет.

IV.15. Пусть $(M, \{s_x\}) = (M_1, \{s_u^1\}) \times (M_2, \{s_v^2\})$. Тогда каждое подмногообразие вида $M'_{1p} = M_1 \times \{p\}$ или $M'_{2q} = \{q\} \times M_2$ многообразия $(M, \{s_x\})$ слабо инвариантно, но не обязательно инвариантно (см. IV.10). Из теоремы IV.5 следует, что $\{M'_{1p}\}$ и $\{M'_{2q}\}$ суть инвариантные слоения, если и только если

$$\text{Aut}(M, \{s_x\}) = \text{Aut}(M_1, \{s_u^1\}) \times \text{Aut}(M_2, \{s_v^2\}).$$

Далее, если $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ есть прямая сумма слагаемых $(V_i, S_i, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i)$, $i = 1, 2$, то V_1 и V_2 — слабо инвариантные подмногообразия в $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Доказательство предоставляется читателю.

Предложение IV.16. Связное односвязное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ приводимо, если и только если его инфинитезимальная модель приводима.

Доказательство. Это легко следует из IV.13 и теоремы III.25. $\square$

IV.17. В римановом случае можно дать аналогичные определения и получить аналогичные результаты. Здесь надо только дополнительно требовать, чтобы риманова метрика тоже распадалась в прямое произведение. Подробности предоставляем читателю.

Отметим один частный случай приводимости:

Предложение IV.18. Пусть $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ — инфинитезимальное s -многообразие, такое что $\tilde{T} = 0$, и пусть $V = \sum_{\alpha \in A} V_\alpha$ — разложение V на собственные подпространства преобразования S . (Здесь A обозначает множество всех вещественных собственных чисел и всех пар взаимно сопряжённых комплексных собственных чисел.) Тогда $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ разлагается в прямую сумму инфинитезимальных s -многообразий $(V_\alpha, S_\alpha, \tilde{K}_\alpha, \tilde{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$. Тот же результат верен в римановом случае.

Доказательство. В римановом случае собственные подпространства всегда взаимно ортогональны. Достаточно показать, что $\tilde{K} = \sum_{\alpha \in A} \tilde{K} \circ \pi_\alpha$. Из соотношений $S(\tilde{K}) = \tilde{K}$ и $\tilde{K}(X, Y) \cdot S = 0$ следует, что $\tilde{K}(SX, SY) = \tilde{K}(X, Y)$ для любых $X, Y \in V$. Поэтому $\tilde{K}(\pi_\alpha X, \pi_\beta Y) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Далее,

$$\tilde{K}(\pi_\alpha X, \pi_\alpha Y) \pi_\beta Z = -\tilde{K}(\pi_\beta Z, \pi_\alpha X) \pi_\alpha Y - \tilde{K}(\pi_\alpha Y, \pi_\beta Z) \pi_\alpha Y = 0,$$

согласно первому тождеству Бьянки (здесь $\tilde{T} = 0$). Отсюда и следует наш результат. $\square$

В качестве приложения докажем следующую теорему (см. [LP2]):

Теорема IV.19 (Леджер и Петтит). Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — свя-

зное односвязное риманово регулярное s -многообразие с интегрируемым тензорным полем S . Пусть, далее, n_0 — кратность собственного числа $-I$ преобразования S и $n_1, \dots, n_r$ — размерности собственных подпространств, соответствующих различным парам комплексно-сопряжённых чисел. Тогда

$$(M, g, \{s_x\}) = (M_0, g_0, \{s_u^0\}) \times (M_1, g_1, \{s_v^1\}) \times \dots \times (M_r, g_r, \{s_w^r\}),$$

$$\dim M_i = n_i, \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

где $(M_0, g_0, \{s_u^0\})$ — риманово симметрическое пространство с геодезическими симметриями s_u^0 , а каждое (M_i, g_i) , $i = 1, \dots, r$, — кэлерово симметрическое пространство.

Доказательство. В силу III.56, $\tilde{T} = 0$. Поэтому написанное выше разложение следует из IV.16 и IV.18. Остаётся доказать последнее утверждение теоремы.

Согласно III.49, на каждом пространстве $(M_i, g_i, \{s_{u_i}^i\})$, $i = 1, \dots, r$, мы можем построить инвариантную почти-эрмитову структуру J_i . Так как $\tilde{T} = 0$, то каждое пространство (M_i, g_i) является локально-симметрическим и кэлеровым (III.42 и III.54). Будучи односвязным и полным, каждое (M_i, g_i) является римановым симметрическим многообразием. Наконец, каждая почти-комплексная структура J_i параллельна относительно римановой связности ∇_i , и, в силу III.32, наша кэлерова структура инвариантна относительно обычных симметрий. $\square$

Проблема IV.20. Если риманово симметрическое пространство (M, g) разлагается в прямое произведение, то его семейство геодезических симметрий тоже разлагается в прямое произведение. Для непараллельных регулярных s -структур иногда, хотя и довольно редко, случается, что односвязное риманово регулярное s -многообразие $(M, g, \{s_x\})$ неприводимо, тогда как соответствующее риманово пространство (M, g) есть прямое произведение. Например, в добавлении 4 мы построим непараллельную и неприводимую регулярную s -структуру на $S^2 \times E^3$.

Было бы хорошо дать общий алгебраический критерий такой ситуации.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ s -МНОГООБРАЗИЯ

Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие. Будем говорить, что $(M, \{s_x\})$ есть многообразие полупростого (соотв. разрешимого) типа, если группа $\text{Tr}(M, \{s_x\})$ полупроста (соотв. разрешима).

Следующая теорема обобщает соответствующий классический результат:

Теорема IV.21. Каждое связное периодическое (т.е. конечного порядка) регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ канонически наделяется структурой расслоения, такого что базисное пространство есть регулярное s -многообразие полупростого типа, а слои суть инвариантные подмногообразия, являющиеся регулярными s -многообразиями разрешимого типа.

Доказательство. Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – инфинитезимальная модель для $(M, \{s_x\})$, $(G, H, \mathcal{C})$ – соответствующее примарное регулярное однородное s -многообразие, а $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ – соответствующий примарный локально-регулярный s -триплет, $\nu = \mathcal{C}_*$ (см. гл. III). Здесь $G = \text{Tr}(M, \{s_x\})$.

Напомним эквивариантную версию теоремы Леви (см., например, [KH2]’):

Лемма IV.22. Пусть K – компактная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}$ обладает подалгеброй Леви $\mathfrak{L}$, которая инвариантна относительно K , т.е. имеет место K -инвариантное разложение векторного пространства $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{k}$ – радикал алгебры $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{L}$ – некоторая полупростая подалгебра. (Это разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{L}$ называется разложением Леви.)

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{L}$ – разложение Леви, инвариантное относительно ν (напомним, что ν предполагается периодическим). Рассмотрим разложение Фиттинга $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$ относительно $A = \text{id} - \nu$. Алгебры $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{L}$ обе инвариантны относительно A ; используя их фиттинговы разложения, получаем

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cap V \dot{+} \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cap V \dot{+} \mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}.$$

Далее, $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}, \nu|_{\mathfrak{k}})$ и $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}, \nu|_{\mathfrak{L}})$ суть локально-регулярные s -триплеты (не обязательно примарные или эффективные). Связная подгруппа $R \subset G$, определяемая радикалом $\mathfrak{k}$, есть радикал группы G ; это нормальная $\mathcal{C}$ -инвариантная подгруппа; кроме того, она замкнута в G (см. [KH2]’). Триплет $(R, R \cap H, \mathcal{C}|_R)$ есть регулярное однородное s -многообразие. Оно определяет регулярное s -многообразие $(N, \{s'_y\})$. Ясно, что инфинитезимальной моделью для $(N, \{s'_y\})$ будет $(W, S|_W, \tilde{R}|_W, \tilde{T}|_W)$, где $W = \mathfrak{k} \cap V$; легко видеть, что эта четвёрка является инвариантным подмногообразием в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ и, значит, определяет инвариантное слоение многообразия $(M, \{s_x\})$ на подмногообразия, изоморфные $(N, \{s'_y\})$. Далее, группа R разрешима и действует (быть может, неэффективно)

как группа автоморфизмов на $(N, \{s'_y\})$. Так как $\text{Tr}(N, \{s'_y\})$ есть нормальная подгруппа в $\text{Aut}(N, \{s'_y\})$, то она тоже разрешима.

Рассмотрим факторгруппу $S = G/R$. Она полупроста, так как её алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{S}$. Далее, триплет $(G/R, H/(R \cap H)\tilde{\mathfrak{b}})$, где $\tilde{\mathfrak{b}}$ — "проекция" преобразования $\mathfrak{b}$ на G/R , есть регулярное однородное s -многообразие. Действительно, соответствующий локальный триплет $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, \mathfrak{h}/\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}), \tilde{\nu})$ естественно изоморфен триплету $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \cap \mathfrak{h}, \nu|_{\mathfrak{S}})$, представляющему собой локально-регулярный s -триплет. Соответствующее регулярное s -многообразие будет полупростого типа; доказательство этого факта аналогично проведённому выше. Рассмотрим теперь $G/H = M$ как расслоение над $(G/R)/(H/(R \cap H))$, слои здесь диффеоморфны $R/(R \cap H)$, и они совпадают с нашими инвариантными слоями. $\square$

Замечание IV.23. Стоит подчеркнуть, что мы существенно использовали теорему Леви при доказательстве того факта, что базисное пространство есть регулярное s -многообразие (более конкретно, при доказательстве того, что проекции симметрий на базу также являются симметриями). В классическом результате о симметрических пространствах необходимости в использовании теоремы Леви нет.

Теорема IV.24. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное периодическое регулярное s -многообразие, которое к тому же метризуемо. Тогда $(M, \{s_x\})$ допускает два взаимно дополнительных слояния $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, таких что: (а) $\mathfrak{F}_1$ инвариантно, и его слоями служат регулярные s -многообразия разрешимого типа; (б) $\mathfrak{F}_2$ слабо инвариантно, и его слоями служат регулярные s -многообразия полупростого типа.

Доказательство. Пусть $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$, $(G, H, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ имеют тот же смысл, что и раньше. Достаточно показать, что существует разложение Леви $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{s}$, такое что $\mathfrak{s} \cap V$ — слабо инвариантное подпространство в V относительно $(M, \{s_x\})$. Так как группа H изоморфна группе голономии пространства $(M, \tilde{V})$ и $(M, \{s_x\})$ метризуемо, то H компактна (см. II.53). Далее, ν коммутирует с каждым элементом $\text{ad}(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h} \in H$, на $\mathfrak{g}$, и потому группа K , порождённая преобразованиями $\text{ad}(H)$ и ν , компактна. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{s}$ есть K -инвариантное разложение Леви. Так как V является K -инвариантным, то $\mathfrak{s} \cap V$ тоже K -инвариантно, и, по определению, оно слабо инвариантно. $\square$

IV.25. Рассмотрим теперь периодическое s -многообразие полупростого типа. Классическая теорема о симметрических пространствах гла-

сит, что симметрическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ с полупростой алгеброй $\mathfrak{g}$ ($\nu^2 = \text{id}$) может быть разложена в прямую сумму простых симметрических алгебр Ли и симметрических алгебр Ли типа $(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}, \Delta \tilde{\mathfrak{g}}, \nu)$, где $\tilde{\mathfrak{g}}$ проста, $\Delta \tilde{\mathfrak{g}} = \{(X, X) : X \in \tilde{\mathfrak{g}}\}$, а $\nu(X, Y) = (Y, X)$ для $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$ ($[\text{Хе}]'$, $[\text{КН2}]'$).

В гл. 0 мы ввели регулярные однородные s -многообразия вида $(G^k, \Delta G^k, \mathfrak{c})$, где $\mathfrak{c}(x_1, \dots, x_k) = (x_k, x_1, \dots, x_{k-1})$, или, что то же, локально-регулярные s -триплеты вида $(\mathfrak{g}^k, \Delta \mathfrak{g}^k, \nu)$, где $\nu(X_1, \dots, X_k) = (X_k, X_1, \dots, X_{k-1})$ для $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$. Возникает естественный вопрос, верно ли, что каждый периодический локально-регулярный s -триплет $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \nu)$ с полупростой алгеброй $\mathfrak{g}$ может быть представлен как прямая сумма s -триплетов вида $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i, \nu_i)$ с простыми $\mathfrak{g}_i$ и "циклических" s -триплетов вида $(\mathfrak{g}_\alpha^{k_\alpha}, \Delta \mathfrak{g}_\alpha^{k_\alpha}, \nu_\alpha)$, где $\mathfrak{g}_\alpha$ просты. Ответ отрицателен, как показывает следующий контрпример.

Рассмотрим примарный локально-регулярный s -триплет $(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3), \mathfrak{h}, \nu)$, где $\mathfrak{so}(3)$ порождается естественным базисом $\{X, Y, Z\}$ (соотв. $\{X', Y', Z'\}$, в случае второго слагаемого), $\mathfrak{h} = (X + X')$, а

$$\begin{aligned} \nu(X) &= X', \quad \nu(Y) = -Z', & \nu(Z) &= Y', \\ \nu(X') &= X, \quad \nu(Y') = -Z, & \nu(Z') &= Y. \end{aligned} \quad ^{26)}$$

Так как $\dim \mathfrak{h} = 1$, то наш s -триплет не изоморфен триплету "циклического" вида (см. тип 5а из классификационного списка обобщённых симметрических римановых пространств размерности 5, приведённого в гл. VI).

Урок, который следует отсюда извлечь, заключается в том, что изучение регулярных s -многообразий с полупростыми группами нельзя свести к изучению таких многообразий с простыми группами, по крайней мере при помощи вышеуказанных конструкций. Это создаёт дополнительные трудности в проблеме классификации.

СЛИЯНИЯ

Слияние²⁷⁾ — это операция обобщённого произведения, которая позволяет строить из неприводимых s -многообразий новые неприводимые s -многообразия. Мы обсудим здесь риманов случай; общий случай аналогичен, но легче.

Пусть $\mathcal{U} = (V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — риманово инфинитезимальное s -

многообразие. Разложение векторного пространства V в прямую сумму $V = W \dot{+} A$ называется сливающим²⁸⁾, если

(i) W, A — нетривиальные слабо инвариантные подмногообразия в $\mathcal{U}$;

(ii) W и A ортогональны;

(iii) W есть идеал в том смысле, что $\tilde{T}(X, Y) \in W$, если $X \in W$ или $Y \in W$, и $\tilde{K}(X, Y)Z \in W$, если $X \in W$, или $Y \in W$, или $Z \in W$.

Для приводимых $\mathcal{U}$ такое разложение всегда существует. Что более важно, оно часто существует и для неприводимых $\mathcal{U}$.

Пусть, далее, $\mathcal{U}_i = (V_i, g_i, S_i, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i)$, $i = 1, 2$, — два римановых инфинитезимальных s-многообразия и $V_i = W_i \dot{+} A_i$ — сливающие разложения. Тогда A_1, A_2 суть низлежащие множества некоторых инфинитезимальных s-многообразий $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{U}_2$. Допустим, что существует изоморфизм $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$. Тогда подпространство

$$V_1 \cup_f V_2 = (W_1 \dot{+} W_2) \dot{+} \{Z + f(Z) : Z \in A_1\} \quad (1)$$

будет слабо инвариантным подмногообразием прямой суммы $\mathcal{U}_1 \dot{+} \mathcal{U}_2$. Риманово инфинитезимальное s-многообразие $\mathcal{U}_1 \cup_f \mathcal{U}_2$, получающееся таким способом, называется слиянием $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ посредством f . Отметим, что разложение (1) снова является слиянием. Если $\mathcal{U} = (V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ допускает сливающее разложение $V = W \dot{+} A$, то мы всегда можем взять два экземпляра многообразия $\mathcal{U}$ и построить $\mathcal{U} \cup_f \mathcal{U}$, где f — тождественное отображение $\text{id}: A \rightarrow A$. Итерациями или непосредственно можно построить последовательность самослияний $\mathcal{U}, \mathcal{U} \cup_f \mathcal{U}, \mathcal{U} \cup_f \mathcal{U} \cup_f \mathcal{U}, \dots$ и т.д.

В силу теоремы III.39, операция слияния применима также и к односвязным регулярным s-многообразиям.

Пример IV.26. Каждое из введенных нами в примерах IV.9a, b и IV.11 римановых s-многообразий допускает сливающее разложение. Рассмотрим поближе пример IV.9a, где единственным сливающим разложением является $V = (X, Y) \dot{+} (Z)$. Возьмём два таких многообразия $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ с различными λ , скажем λ_1 и λ_2 . Если мы построим слияние $\mathcal{U}_1 \cup_f \mathcal{U}_2$ с $f: Z_1/\lambda_1 \rightarrow Z_2/\lambda_2$, то получим 5-мерное односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство, соответствующее типу 2 нашего классификационного списка (см. теорему VI.5), а именно

$$M = \mathbb{R}^5[x, y, z, w, t],$$

$$ds^2 = e^{-2\lambda_1 t} dx^2 + e^{2\lambda_1 t} dy^2 + e^{-2\lambda_2 t} dz^2 + e^{2\lambda_2 t} dw^2 + dt^2.$$

Можно проверить, что (M, g) — неприводимое риманово многообразие.

Сейчас мы докажем общую теорему о неприводимости. Риманово инфинитезимальное s -многообразие $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ называется многообразием без центра (или бесцентровым), если оно не содержит подпространства $C \neq (0)$, такого что $\tilde{T}(Z, X) = 0$, $\tilde{R}(Z, X) = 0$ для $Z \in C$, $X \in V$.

Теорема IV.27. Пусть $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ — неприводимые римановы инфинитезимальные s -многообразия без центра. Если слияние $\mathcal{V}_1 \cup_f \mathcal{V}_2$ существует, то оно является неприводимым и бесцентровым.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}_i = (V_i, g_i, S_i, \tilde{R}_i, \tilde{T}_i)$, $V_i = W_i \dot{+} A_i$, $f: A_1 \rightarrow A_2$.

$$\mathcal{V}_1 \cup_f \mathcal{V}_2 = (V_1 \cup_f V_2, g, S, \tilde{R}, \tilde{T}).$$

Рассмотрим проекции $\pi_i: V_1 \dot{+} V_2 \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$. Будучи сужены на $V_1 \cup_f V_2$, они остаются сюръективными. Предположим, что $\mathcal{V}_1 \cup_f \mathcal{V}_2$ приводимо, т.е. $V_1 \cup_f V_2 = L_1 \dot{+} L_2$ есть ортогональная сумма слабо инвариантных подмногообразий многообразия $\mathcal{V}_1 \cup_f \mathcal{V}_2$. Тогда $V_i = \pi_i(L_1) + \pi_i(L_2)$ для $i = 1, 2$ (обычная сумма подпространств). Заметим, что

$$\tilde{R}_i \circ \pi_i = \pi_i \circ \tilde{R}, \quad \tilde{T}_i \circ \pi_i = \pi_i \circ \tilde{T}, \quad S_i = \pi_i \circ S. \quad (2)$$

Отсюда следует, что $\pi_i(L_1) \cap \pi_i(L_2)$ лежит в центре C_i пространства $\mathcal{V}_i$ и, таким образом, тривиально. Мы заключаем, что $V_i = \pi_i(L_1) \dot{+} \pi_i(L_2)$ (прямая сумма векторных пространств).

Допустим, что, например, разложение $V_1 = \pi_1(L_1) \dot{+} \pi_1(L_2)$ нетривиально. Из (2) вытекает, что $\pi_1(L_1), \pi_1(L_2)$ — слабо инвариантные подмногообразия в $\mathcal{V}_1$. Далее, так как тензоры $S, \tilde{R}, \tilde{T}$ расщепляются относительно $V_1 \cup_f V_2 = L_1 \dot{+} L_2$, то тензоры $S_1, \tilde{R}_1, \tilde{T}_1$ расщепляются относительно $V_1 = \pi_1(L_1) \dot{+} \pi_1(L_2)$. Остается доказать, что наше разложение также и ортогонально.

Пусть $X + H \in \pi_1(L_1)$, где $X \in W_1$, $H \in A_1$. Если $U_1 \in L_1$ таково, что $X + H = \pi_1(U_1)$, то $U_1 = X + H + f(H) + X'$, где $X' \in W_2$. Пусть $X = Z_1 + Z_2$ для некоторых $Z_1 \in L_1$, $Z_2 \in L_2$. Из $\pi_2(X) = 0$ следует, что $\pi_2(Z_1) = -\pi_2(Z_2) = 0$, поскольку $\pi_2(L_1) \cap \pi_2(L_2)$ тривиально. Итак, $Z_1, Z_2 \in W_1$. Далее, $g(U_1 - Z_1, Z_2) = 0$, т.е. $g(Z_2 + H + f(H) + X', Z_2)$

$= 0$. Так как $Z_2 \in W_1$ ортогонально к $H \in A_1$, $f(H) \in A_2$, $X' \in W_2$, то $q(Z_2, Z_2) = 0$, т.е. $Z_2 = 0$. Итак, $X = Z_1 \in L_1$. Аналогично получаем, что $X' \in L_1$. Таким образом, $H + f(H) \in L_1$. Если теперь $Y + G \in \pi_1(L_2)$, то мы находим тем же способом, что $Y \in L_2$, $G + f(G) \in L_2$, откуда $q(H + f(H), G + f(G)) = 0$, т.е. $2q_1(H, G) = 0$; также и $q_1(X, Y) = 0$. Следовательно, $q_1(X + H, Y + G) = 0$, чем желаемая ортогональность и установлена.

Мы заключаем, что $\pi_1(L_1) \dot{+} \pi_1(L_2)$ есть прямая сумма слабо инвариантных подмногообразий в $\mathcal{U}_1$, в противоречие с неприводимостью $\mathcal{U}_1$.

Итак, единственная возможность состоит в том, что оба разложения тривиальны, т.е. $\pi_2(L_1) = (0)$, $\pi_1(L_2) = (0)$. Но тогда $L_1 \subset W_1$, $L_2 \subset W_2$ и $V_1 \cup_f V_2 = L_1 \dot{+} L_2 \subset W_1 \dot{+} W$, в противоречие с предположением $A_1 \neq (0)$.

Мы установили, что $\mathcal{U}_1 \cup_f \mathcal{U}_2$ неприводимо. Легко также показать, что оно бесцентрово. $\square$

Замечание IV.28. Инфинитезимальные s -многообразия из примеров IV.9а, б неприводимы и бесцентровы. В примере IV.11 инфинитезимальное s -многообразие неприводимо, но не является бесцентровым.

Пусть $\mathcal{U} = (V, q, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ — риманово инфинитезимальное s -многообразие и $V = W \dot{+} A$ — сливающее разложение. Для каждого $\lambda > 0$ рассмотрим риманово инфинитезимальное s -многообразие $\mathcal{U}^\lambda = (V, q^\lambda, S, \tilde{K}, \tilde{T})$, где $q^\lambda = q$ на W и $q^\lambda = \lambda \cdot q$ на A . Если через

$$\mathcal{U}_n = (V, q_n, S_n, \tilde{K}_n, \tilde{T}_n)$$

обозначить n -кратное самослияние многообразия $\mathcal{U}^{1/n}$ посредством id_A , то $\mathcal{U}$ изоморфно некоторому слабо инвариантному подмногообразию в $\mathcal{U}_n$. Действительно, возьмём n экземпляров $\mathcal{U}^{(1)}, \dots, \mathcal{U}^{(n)}$ пространства $\mathcal{U}^{1/n}$. Тогда

$$V_n = W^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} W^{(n)} \dot{+} \{Z^{(1)} + \dots + Z^{(n)} : Z \in A\}$$

и $\mathcal{U}$ изоморфно подмногообразию $W^{(1)} \dot{+} \{Z^{(1)} + \dots + Z^{(n)} : Z \in A\}$ в $\mathcal{U}_n$ — этот изоморфизм осуществляется посредством соответствия

$$(X + Z) \longmapsto X^{(1)} + (Z^{(1)} + \dots + Z^{(n)}), \quad X \in W, Z \in A.$$

Далее, если (M_n, q_n) — односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство, соответствующее $\mathcal{U}_n$, то $\mathcal{U}$ порождает некото-

рое слоение $\mathcal{F}$ пространства (M_n, g_n) в смысле IV.7. Более того, при этом удовлетворяется критерий IV.8, так как $W^{(1)} + \dots + W^{(n)}$ есть идеал в $\mathcal{U}_n$; следовательно, $\mathcal{F}$ является вполне геодезическим.

Приложение IV.29 (о пространствах порядка три). Пусть (M, g) — обобщённое симметрическое пространство порядка 3 и $\{s_x\}$ — регулярная s -структура на (M, g) , $(s_x)^3 = \text{id}$. Предположим, что инфинитезимальная модель $\mathcal{U} = (V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ неприводима, бесцентрова и допускает сливающее разложение $V = W + A$. Тогда $\mathcal{U}$ порождает бесконечную последовательность $(M_i, g_i, \{s_{i,x}\})$, $\dim M_i \rightarrow \infty$, неприводимых римановых s -многообразий, для которых низлежащие римановы пространства (M_i, g_i) имеют порядок три.

Доказательство. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим инфинитезимальное s -многообразие $\mathcal{U}_n$ и пространство (M_n, g_n) , определённые, как в замечании IV.28. Так как $S^3 = \text{Id}$, то $(S_n)^3 = \text{Id}$, и пространство (M_n, g_n) является 3-симметрическим²⁹⁾. Согласно теореме IV.27, s -многообразие $(M_n, g_n, \{s_{n,x}\})$ неприводимо. Наконец, (M_n, g_n) не может быть 2-симметрично, иначе вполне геодезическое слоение $\mathcal{F}$, порождённое пространством $\mathcal{U}$, состояло бы из римановых симметрических пространств и (M, g) было бы 2-симметрично, вопреки предположению. $\square$

В частности, это приложение применимо к примеру IV.9b.

КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ

Пусть (M, h) — эрмитово многообразие. Регулярная s -структура $\{s_x\}$ на M называется эрмитовой, если каждое s_x есть голоморфное сохраняющее метрику преобразование многообразия (M, h) . Тройка $(M, h, \{s_x\})$ называется тогда эрмитовым регулярным s -многообразием. Если на (M, h) существует хотя бы одна эрмитова структура $\{s_x\}$, то мы называем (M, h) обобщённым симметрическим эрмитовым пространством.

Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — связное односвязное риманово регулярное s -многообразие, каноническая связность которого удовлетворяет условию $\tilde{K} = 0$. Согласно теореме II.41 и следствию II.42, группа $\text{Tr}(M)$ однотранзитивна на (M, g) . Инфинитезимальная модель $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ есть тогда не что иное, как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $\text{Tr}(M)$, наделённая скалярным произведением g и изометрическим автоморфизмом S . Здесь $[X, Y] = -\tilde{T}(X, Y)$ для любых $X, Y \in V$.

Рассмотрим комплектификацию $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ как комплексную ал-

гебру Ли. Если $\{X_1, \dots, X_n\}$ – базис для $\mathfrak{L}$, то можно превратить $\mathfrak{L}^c$ в $2n$ -мерную вещественную алгебру Ли с базисом $\{X_1, \dots, X_n, \sqrt{-1} \cdot X_1, \dots, \sqrt{-1} \cdot X_n\}$ и комплексной структурой J , определённой равенством $JX = \sqrt{-1} \cdot X$ (см. [КН2]’). В последующем мы будем полагать $Y_i = \sqrt{-1} \cdot X_i$ для $i = 1, \dots, n$. Итак, $JX_i = Y_i, JY_i = -X_i$ для всех i . Далее, для скобок Ли в $\mathfrak{L}^c$ мы имеем $J([X, Y]) = [JX, Y] = [X, JY]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{L}^c$. Кроме того, S , будучи продолжено на $\mathfrak{L}^c$ по линейности, удовлетворяет условию $S^c \circ J = J \circ S^c$; продолженное отображение S^c есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{L}^c$, сохраняющий комплексную структуру. Наконец, определим вещественное эрмитово скалярное произведение $\tilde{q}^c$ на $\mathfrak{L}^c$ (рассматриваемом как $2n$ -мерное вещественное векторное пространство с комплексной структурой J), полагая

$$\tilde{q}^c(X_i, X_j) = q(X_i, X_j), \tilde{q}^c(X_i, Y_j) = 0, \tilde{q}^c(Y_i, Y_j) = q(X_i, X_j)$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$. Ясно, что $\tilde{q}^c$ также инвариантно относительно S^c . (Здесь $\tilde{q}^c$ не следует путать с q^c – комплексификацией метрики q – или с комплексным эрмитовым произведением, определённым на $\mathfrak{L}^c$ как на комплексном n -мерном векторном пространстве.)

Мы построили $2n$ -мерное риманово инфинитезимальное s -многообразие $(V^c, \tilde{q}^c, S^c, 0, \tilde{T}^c)$, наделённое S -инвариантной эрмитовой комплексной структурой J . Соответствующее односвязное риманово регулярное s -многообразие $(M^c, \tilde{q}^c, \{s_x^c\})$ обладает естественной структурой эрмитова регулярного s -многообразия. Действительно, согласно замечанию III.55, комплексная структура J на V^c определяет S_x -инвариантную почти-комплексную структуру J на M^c . Далее, так как (V^c, J) – комплексная алгебра Ли, то (M^c, J) есть комплексная группа Ли, и, таким образом, J интегрируема. (Ср. [КН2]’, стр. 125.)

Мы доказали главную часть следующей теоремы:

Теорема IV.30. Каждое связное односвязное риманово регулярное s -многообразие $(M, q, \{s_x\})$, удовлетворяющее условию $\tilde{K} = 0$, обладает однозначно определённой комплексификацией $(M^c, \tilde{q}^c, \{s_x^c\})$. Здесь $(M^c, \tilde{q}^c, \{s_x^c\})$ есть эрмитово регулярное s -многообразие, причём $\dim_{\mathbb{C}} M^c = \dim_{\mathbb{R}} M = n$. Далее, $(M^c, \tilde{q}^c, \{s_x^c\})$ допускает n -мерное вполне геодезическое слоение, слои которого естественным образом изоморфны пространству $(M, q, \{s_x\})$.

Доказательство. Надо доказать последнее утверждение. Ясно, что

$(V, g, S, 0, \tilde{T})$ – слабо инвариантное подмногообразие в $(V^c, \tilde{g}^c, S^c, 0, \tilde{T}^c)$, так что слоение $\mathcal{F}$ корректно определено (см. IV.10). Далее, $J(V)$ есть ортогональное дополнение к V в V^c относительно $\tilde{g}^c$. Поэтому для $X \in V$, $Z \in V^\perp$ мы имеем $Z = JX'$, $X' \in V$, и

$$\tilde{g}^c(\tilde{T}^c(X, Z), X) = \tilde{g}^c(\tilde{T}^c(X, JX'), X) = \tilde{g}^c(J(\tilde{T}^c(X, X')), X) = 0.$$

Согласно предложению IV.8, $\mathcal{F}$ является вполне геодезическим. $\square$

Проблемы IV.31. Пусть $(M^c, g^c, \{s_x^c\})$ – комплексификация пространства $(M, g, \{s_x\})$.

(1) Если (M, g) эвклидово, то будет ли (M^c, g^c) тоже эвклидовым?

(2) Если $(M, \{s_x\})$ неприводимо и $\dim M > 2$, то будет ли $(M^c, \{s_x^c\})$ тоже неприводимым? (См. также пример IV.35.)

ПРОСТРАНСТВА БЕЗ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Будем говорить, что риманово однородное ³⁰⁾многообразие (M, g) не допускает (или является многообразием без) инфинитезимальных вращений, если $\dim I(M, g) = \dim M$. В частности, если (M, g) связно, односвязно и не допускает инфинитезимальных вращений, то компонента единицы $I^*(M, g)$ группы $I(M, g)$ одностранзитивна на (M, g) , а подгруппа изотропии группы $I(M, g)$ конечна в каждой точке.

Предложение IV.32. Пусть (M, g) – обобщённое симметрическое риманово пространство без инфинитезимальных вращений. Тогда для каждой римановой регулярной s -структуры $\{s_x\}$ на (M, g) мы имеем $\text{Tr}(M, \{s_x\}) = I^*(M, g)$ и каноническая связность удовлетворяет условию $\tilde{K} = 0$. ³¹⁾

Доказательство. Имеем $\text{Tr}(M, \{s_x\}) \subset I^*(M, g)$, и $\text{Tr}(M)$ транзитивна на (M, g) . Следовательно,

$$\dim \text{Tr}(M) \leq \dim I^*(M, g) = \dim M \leq \dim \text{Tr}(M),$$

и потому $\text{Tr}(M)$ – открытая подгруппа Ли в $I^*(M, g)$. Отсюда следует, что $\text{Tr}(M) = I^*(M, g)$. Так как подалгебра изотропии $\mathfrak{h}$ группы $\text{Tr}(M)$ тривиальна в любой точке, то $\tilde{K} = 0$. $\square$

В качестве следствия мы получаем, что все допустимые s -структуры $\{s_x\}$ имеют одну и ту же каноническую связность $\tilde{V}$; это есть $(-)$ -связность Картана группы $I^*(M, g)$. Далее, группа $I^*(M, g)$

разрешима, и если M односвязно, то оно гомеоморфно евклидову пространству (см. II.41, 42, 50).

Обобщённые симметрические римановы пространства без инфинитезимальных вращений встречаются часто. (Все пространства с этим свойством являются пространствами разрешимого типа.) Посмотрим в наш классификационный список. Пространства порядка 4 и размерности 3 обсуждались в гл. 0. Далее, в размерности 5 следующие пространства из нашего классификационного списка не допускают инфинитезимальных вращений (см. гл. VI):

пространства типа 2 при $\lambda_1 > \lambda_2$,
 пространства типа 4 при $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$, $\nu \neq 0$,
 пространства типа 7 при $\lambda \neq 0$,
 пространства типа 9 (порядка 6).

Теперь сформулируем наш главный результат, касающийся комплексификаций:

Теорема IV.33. Пусть (M, g) — односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство без инфинитезимальных вращений. Существует однозначно определённое обобщённое симметрическое эрмитово пространство $(M^c, \tilde{g}^c)$, называемое комплексификацией пространства (M, g) , со следующим свойством: для любой римановой регулярной s -структуры $\{s_x\}$ на (M, g) найдётся эрмитова регулярная s -структура $\{s_z^c\}$ на $(M^c, \tilde{g}^c)$, такая что $(M^c, \tilde{g}^c, \{s_z^c\})$ есть комплексификация пространства $(M, g, \{s_x\})$ в смысле теоремы IV.30.

Доказательство. Согласно теореме IV.30, $(M^c, \tilde{g}^c)$ однозначно определяется алгеброй Ли $\mathfrak{h}$ группы $\text{Tr}(M)$ и скалярным произведением g . Но, согласно предложению IV.32, $\mathfrak{h}$ также является алгеброй Ли группы $I(M, g)$. Следовательно, $(M^c, \tilde{g}^c)$ однозначно определяется пространством (M, g) . $\square$

Следствие IV.34. Комплексификация $(M^c, \tilde{g}^c)$ пространства (M, g) гомеоморфна комплексному декартову пространству³²⁾. Она допускает вполне геодезическое слоение, слои которого изометричны (M, g) . Если (M, g) не является локально-симметрическим, то $(M^c, \tilde{g}^c)$ тоже не является локально-симметрическим.

Доказательство. Комплексификация $\mathfrak{h}^c$ разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{h}$ также разрешима. Поэтому низлежащее многообразие M^c соответствующей односвязной группы Ли L^c гомеоморфно $\mathbb{C}^n$. Этим доказано первое утверждение. Второе вытекает из теоремы IV.30, а третье немедленно следует из второго. $\square$

Пример IV.35. Многообразие $\mathbb{R}^3(a, b, c)$ с римановой метрикой

$$ds^2 = e^{2c} da^2 + e^{-2c} db^2 + \lambda^2 dc^2$$

(обобщённое симметрическое пространство порядка 4) не обладает инфинитезимальными вращениями. Его комплексификация есть многообразие $\mathbb{C}^3(u, v, w)$ с эрмитовой метрикой

$$ds^2 = e^{(w+\bar{w})} dud\bar{u} + e^{-(w+\bar{w})} dv d\bar{v} + \lambda^2 dw d\bar{w}.$$

Эрмитова симметрия в начале задаётся соотношениями $u' = -v, v' = u, w' = -w$. Это эрмитово многообразие приводимо как вещественное риманово многообразие размерности 6 (а именно, оно разлагается в прямое произведение 5-мерного пространства из примера IV.26 и вещественной прямой), но неприводимо как риманово s -многообразие порядка 4.

ПСЕВДОДУАЛЬНОСТЬ

Псевдодуальность определяется лишь для связных односвязных регулярных s -многообразий порядка 4. Мы ограничимся рассмотрением (более важного) риманова случая.

Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — риманово регулярное s -многообразие порядка 4, являющееся связным и односвязным, и пусть $\mathcal{U} = (V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ — его инфинитезимальная модель. Преобразование S имеет теперь в качестве собственных чисел только $\pm\sqrt{-1}$, -1 . Запишем разложение $V = W \dot{+} Z$, где W — инвариантное подпространство, соответствующее числам $\pm\sqrt{-1}$, а Z — собственное подпространство, соответствующее числу -1 . Здесь $W \perp Z$, и оба подпространства S -инвариантны.

Рассмотрим пятёрку $\mathcal{U}' = (V, g, S, \tilde{K}', \tilde{T}')$, где $\tilde{K}' = -\tilde{K}, \tilde{T}' = -\tilde{T}$ на $W \times W$ и $\tilde{K}' = \tilde{K}, \tilde{T}' = \tilde{T}$ на $(W \times Z) \cup (Z \times W) \cup (Z \times Z)$. Легко проверить, что $\mathcal{U}'$ — риманово инфинитезимальное s -многообразие. (При этом используются лишь свойства $S(\tilde{K}) = \tilde{K}, S(\tilde{T}) = \tilde{T}$, из которых следует, что $\tilde{T}(W \times W) \subset Z, \tilde{T}(W \times Z) \subset W$.) Это многообразие $\mathcal{U}'$ (или соответствующее односвязное многообразие $(M', g', \{s'_y\})$) называется псевдодуальным к $\mathcal{U}$ (соотв. к $(M, g, \{s_x\})$). Ясно, что псевдодуальность есть разновидность дуальности: если $\mathcal{U}'$ псевдодуально к $\mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ псевдодуально к $\mathcal{U}'$.

Эквивалентное определение таково. Пусть $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$ — алгебра Ли для $\mathcal{U} = (V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$, как в III.30 ($\mathfrak{h}$ порождается эндоморфизмами $\tilde{K}(X, Y), X, Y \in V$). Тогда $\mathfrak{g} = W \dot{+} Z \dot{+} \mathfrak{h}$. Ес-

ли $\mathfrak{g}^c$ - комплексификация алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}' = \sqrt{-1} \cdot W + Z + \mathfrak{h}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}^c$. Рассмотрим $\mathfrak{g}'$ как вещественную алгебру Ли и определим скалярное произведение в $V' = \sqrt{-1} \cdot W + Z$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} g'(\sqrt{-1} \cdot X, \sqrt{-1} \cdot Y) &= g(X, Y) && \text{для } X, Y \in W, \\ g'(\sqrt{-1} \cdot X, U) &= 0 && \text{для } X \in W, U \in Z, \\ g'(U, U') &= g(U, U') && \text{для } U, U' \in Z. \end{aligned}$$

Далее, при помощи автоморфизма $S + id$ алгебры $\mathfrak{g}'$ определяется некоторый автоморфизм ν алгебры $\mathfrak{g}'$. Тем самым мы получаем некоторое регулярное однородное s -многообразие $(G', H', \mathfrak{g})$ порядка 4 (см. III.29) с левоинвариантной метрикой; соответствующее риманово регулярное s -многообразие $(G'/H, g', \{s'_y\})$ и будет псевдодуальным к $(M, g, \{s_x\})$. Это определение аналогично определению дуальности для обычных симметрических пространств; отсюда и термин "псевдодуальность".

В случае когда $(M, g, \{s_x\})$ и $(M', g', \{s'_x\})$ псевдодуальны друг другу, обобщённые симметрические римановы пространства (M, g) и (M', g') тоже называют псевдодуальными.

Пример IV.36. В классификационном списке 5-мерных обобщённых симметрических римановых пространств (гл. VI) типы 5a и 5b, 6a и 6b, 8a и 8b образуют псевдодуальные пары (вида "эллиптическое - гиперболическое"). Остальные типы, будучи представлены соответствующими римановыми регулярными s -многообразиями, самодуальны.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Начнём со следующей хорошо известной леммы.

Лемма IV.37. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли и $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ - её эндоморфизм. Пусть $\mathfrak{g}^c = \sum_{\alpha \in J} \mathfrak{g}_{\alpha}$ - разложение комплексификации $\mathfrak{g}^c$ на комплексные собственные пространства, соответствующие различным собственным числам α эндоморфизма A :

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{Z \in \mathfrak{g}^c : (A - \alpha I)^k Z = 0 \text{ для некоторого } k\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] &\subset \mathfrak{g}_{\alpha\beta}, \text{ если } \alpha\beta - \text{собственное число,} \\ [\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] &= 0 \quad \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

В качестве приложения к инфинитезимальным S -многообразиям получим следующее

Предложение IV.38. Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – инфинитезимальное S -многообразие и $V^c = \sum_{\alpha \in J} V_\alpha$ – разложение комплексификации $V^c = V \otimes \mathbb{C}$ на (максимальные) комплексные собственные подпространства, соответствующие различным собственным числам α преобразования S . Тогда:

- (a) $\tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) = 0$, если $\alpha, \beta \in J, \alpha\beta \notin J$;
- (b) $\tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) \subset V_{\alpha\beta}$, если $\alpha, \beta, \alpha\beta \in J$;
- (c) $\tilde{R}(V_\alpha, V_\beta) = 0$ если $\alpha, \beta \in J, \alpha\beta \neq 1$;
- (d) $\tilde{R}(Z, Z')(V_\alpha) \subset V_\alpha$ для любых $Z, Z' \in V^c$ и $\alpha \in J$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h}$ – алгебра Ли для $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$, как и в III.30. Тогда $\mathfrak{h}$ есть алгебра Ли, порождённая всеми эндоморфизмами $\tilde{R}(X, Y)$, $X, Y \in V$, так что

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -\tilde{T}(X, Y) - \tilde{R}(X, Y), & X, Y \in V, \\ [A, X] &= AX, & A \in \mathfrak{h}, X \in V, \\ [A, B] &= AB - BA, & A, B \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Тогда $S^+ = S + \text{id}_{\mathfrak{h}}$ будет автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$, как это следует из соотношений

$$S(\tilde{T}) = \tilde{T}, \quad \tilde{R}(X, Y) \circ S = S \circ \tilde{R}(X, Y), \quad \tilde{R}(SX, SY) = \tilde{R}(X, Y).$$

Здесь $\mathfrak{g}_\alpha = V_\alpha$ для $\alpha \in J$ и $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}^c$ (в обозначениях леммы IV.37). Далее, $\tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) \subset V^c$ и $\tilde{R}(V_\alpha, V_\beta) \subset \mathfrak{h}^c$ для $\alpha, \beta \in J$. Отсюда вытекают (a), (b) и (c). Соотношение (d) следует из того, что

$$[\mathfrak{h}^c, V_\alpha] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha = V_\alpha, \quad \alpha \in J. \quad \square$$

Пусть $(M, \{s_x\})$ – связное регулярное S -многообразие, $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – его инфинитезимальная модель. Пусть, далее, J – множество всех собственных чисел преобразования S , так что $V^c = \sum_{\alpha \in J} V_\alpha$, как и в предложении IV.38. Ясно, что если $\alpha \in J$, то и $\bar{\alpha} \in J$. Множество J называется множеством собственных чисел многообразия $(M, \{s_x\})$.

Из IV.38, (a), и III.42 вытекает

Следствие IV.39. Пусть $(M, g, \{s_x\})$ – связное риманово ре-

гулярное s -многообразие, а J — его множество собственных чисел. Если для любых $\alpha, \beta \in J$ мы имеем $\alpha\beta \notin J$, то $\tilde{T} = 0$ и, следовательно, (M, g) локально-симметрично.

Будем называть подмножество $K \subset J$ замкнутым, если

- (i) $\alpha \in K \implies \bar{\alpha} \in K$;
- (ii) $\alpha, \alpha' \in K, \alpha\alpha' \in J \implies \alpha\alpha' \in K$.

Теорема IV.40. Пусть $(M, \{s_x\})$ — связное регулярное s -многообразие, а J — его множество собственных чисел. Каждое замкнутое подмножество $K \subset J$ определяет инвариантное слоение пространства $(M, \{s_x\})$ на m -мерные подмногообразия, где m есть сумма кратностей всех $\alpha \in K$.

Доказательство. Достаточно показать, что K определяет m -мерное инвариантное подмногообразие в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$. Положим $W^c = \sum_{\alpha \in K} V_\alpha$. Ясно, что W^c есть комплексификация некоторого S -инвариантного подпространства $W \subset V$, определяемого единственным образом (это следует из (i)). Соотношение $\dim W = m$ очевидно. Далее, каждое собственное подпространство V_α инвариантно относительно группы автоморфизмов пространства $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$. Действительно, так как каждый автоморфизм перестановочен с S , то он перестановочен также и с $(S - \alpha I)^k$, а значит, сохраняет V_α . Следовательно, W инвариантно относительно автоморфизмов. В частности, $\tilde{R}(X, Y)(W) \subset W$ для любых $X, Y \in V$. Наконец, для любых $\alpha, \beta \in K$ либо $\tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) = 0$, либо $\tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) \subset V_{\alpha\beta}$, где $\alpha\beta \in K$. Следовательно, $\tilde{T}(W, W) \subset W$, и W есть подмногообразие в $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$. $\square$

Следствие IV.41. Пусть $(M, g, \{s_x\})$ — связное риманово регулярное s -многообразие, а J — его множество собственных чисел. Каждое замкнутое подмножество $K \subset J$ определяет инвариантное вполне геодезическое слоение пространства (M, g) на m -мерные обобщённые симметрические римановы пространства.

Доказательство. Нам надо только показать, что инвариантное слоение, построенное в теореме IV.40, будет вполне геодезическим, т.е. проверить выполнение формулы из предложения IV.8. Пусть $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — инфинитезимальная модель пространства $(M, g, \{s_x\})$. Запишем

$$V^c = \sum_{\alpha \in J} V_\alpha = \sum_{\alpha \in K} V_\alpha + \sum_{\beta \in J \setminus K} V_\beta = W^c + (W^\perp)^c.$$

Достаточно показать, что

$$g^c(\tilde{T}(V_\alpha + V_{\bar{\alpha}}, V_\beta + V_{\bar{\beta}}), V_\alpha + V_{\bar{\alpha}}) = 0$$

для любых $\alpha \in K$, $\beta \in J \setminus K$, где q^c обозначает комплексификацию метрики q . Но левая часть может быть ненулевой, лишь если $\tilde{T}(V_\alpha + V_{\bar{\alpha}}, V_\beta + V_{\bar{\beta}})$ ненулевое и содержится в W^c , т.е. если $\alpha\beta \in K$ или $\alpha\bar{\beta} \in K$. Так как все собственные числа в нашем случае будут модуля единица (поскольку S — ортогональное преобразование), отсюда следует, что β или $\bar{\beta}$ есть произведение двух элементов из K , что противоречит свойству (ii) из определения замкнутого подмножества $K \subset J$. $\square$

Определение IV.42. Пусть J — множество собственных чисел регулярного s -многообразия $(M, \{s_x\})$. Говорят, что J приводимо, если существует разложение $J = J_1 \cup J_2$ со следующими свойствами:

- (i) если $\alpha \in J_1$ (соотв. J_2), то $\bar{\alpha} \in J_1$ (соотв. J_2);
- (ii) если $\alpha, \beta, \gamma \in J$ и $\alpha\beta = \gamma$, то все α, β, γ принадлежат одной и той же компоненте J_i ;
- (iii) если $\alpha, \beta \in J$ и $\alpha\beta = 1$, то α, β принадлежат одной и той же компоненте J_i .

В противном случае говорят, что J неприводимо.

Теорема IV.43. Если односвязное регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$ имеет приводимое множество собственных чисел, то оно приводимо.

Доказательство. Достаточно показать, что приводима инфинитезимальная модель $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Ясно, что оба подмножества J_1 и J_2 из определения IV.42 замкнуты в J . Отсюда получаем разложение векторного пространства V в прямую сумму $V = W_1 + W_2$, где W_1 и W_2 — инвариантные подмногообразия в $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Остается доказать, что для

$$Z \in W_1^c = \sum_{\alpha \in J_1} V_\alpha, \quad Z' \in W_2^c = \sum_{\beta \in J_2} V_\beta$$

мы имеем $T(Z, Z') = 0$, $\tilde{K}(Z, Z') = 0$. Но если $\alpha \in J_1$, $\beta \in J_2$, то $\alpha\beta$ не является собственным числом и не равно 1. На основании предложения IV.38 заключаем, что $\tilde{T}(V_\alpha, V_\beta) = 0$, $\tilde{K}(V_\alpha, V_\beta) = 0$, откуда и следует наше утверждение. $\square$

Следствие IV.44. Теорема IV.43 остаётся справедливой и для риманова случая.

Литература: [ФЗ]', [Хе]', [КН2]', [К1], [К3], [LP2].

Глава V

Отмеченные s-структуры на обобщённых симметрических пространствах

ОБОБЩЁННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Связное пространство аффинной связности $(M, \tilde{\nabla})$ называется обобщённым аффинным симметрическим пространством (сокращённо о.а.с.п.), если M допускает по крайней мере одну регулярную s -структуру $\{s_x\}$, такую что $\tilde{\nabla}$ есть её каноническая связность. Каждая регулярная s -структура с таким свойством называется допустимой для $(M, \tilde{\nabla})$.

Ясно, что структура $\{s_x\}$ допустима, если и только если все s_x , $x \in M$, суть аффинные преобразования относительно $\tilde{\nabla}$ и $\tilde{\nabla} S = 0$. Согласно II.27, каждое о.а.с.п. есть аффинное редуktивное пространство; обратное же неверно. Здесь мы приведём некоторые условия, достаточные для того, чтобы редуktивное пространство было о.а.с.п.

Предложение V.1. Пусть $(M, \tilde{\nabla})$ – аффинное редуktивное пространство и $s : M \rightarrow M$ – аффинное преобразование, имеющее изолированную неподвижную точку $o \in M$. Преобразование s включается в качестве элемента в некоторую допустимую регулярную s -структуру $\{s_x\}$ на $(M, \tilde{\nabla})$, если и только если $S_o = s_{*o}$ инвариантно относительно группы голономии $\Psi(o) \subset GL(M_o)$.

Доказательство. Если s совпадает с некоторым элементом s_o допустимой регулярной s -структуры $\{s_x\}$, то S_o можно продолжить до параллельного тензорного поля S на $(M, \tilde{\nabla})$ и, значит, S_o инвариантно относительно группы голономии в точке o .

Обратно, пусть $S_o = s_{*o}$ инвариантно относительно группы голономии $\Psi(o)$. Обозначим $\text{Tr}(M)$ через G , а подгруппу изотропии группы G в точке o – через G_o . Линейное представление изотропии группы G_o в касательном пространстве M_o имеет образом $\Psi(o)$.

Так как S_0 перестановочно с каждым элементом из $\Psi(0)$, то s перестановочно с каждым элементом из G_0 . Рассмотрим автоморфизм $\tilde{s}: g \mapsto s \circ g \circ s^{-1}$ группы $A(M)$. Поскольку G — нормальная подгруппа в $A(M)$, $\tilde{s}$ индуцирует автоморфизм $\tilde{G}$ группы G , для которого $G_0 \subset (G)^{\tilde{G}}$. Теперь мы можем определить регулярную s -структуру $\{s_x\}$, $x \in M$, полагая $s_x = g \circ s \circ g^{-1}$, где $g \in G$ — произвольная трансвекция, такая что $g(0) = x$ (ср. с доказательством утверждения I) теоремы II.25). Далее, используя теорему II.25, мы видим, что каноническая связность структуры $\{s_x\}$ совпадает с канонической связностью $\tilde{V}$ редуктивного однородного пространства G/G_0 . Следовательно, $\{s_x\}$ допустима. $\square$

Замечание Y.2. Для всякого аффинного преобразования $s: M \rightarrow M$ имеется самое большее одна допустимая регулярная s -структура $\{s_x\}$, такая что s "происходит от" $\{s_x\}$. Это следует из свойства $\tilde{V}S = 0$.

Как следствие предложения Y.1 получаем

Предложение Y.3. Пусть $(M, \tilde{V})$ — односвязное связное аффинное редуктивное пространство, а $0 \in M$ — фиксированная точка. Допустимые регулярные s -структуры на $(M, \tilde{V})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с линейными преобразованиями $S_0: M_0 \rightarrow M_0$, такими что

- (i) $I_0 - S_0$ есть неособое преобразование M_0 ;
- (ii) $S_0(\tilde{K}_0) = \tilde{K}_0$, $S_0(\tilde{T}_0) = \tilde{T}_0$;
- (iii) $\tilde{K}_0(S_0X, S_0Y) = \tilde{K}_0(X, Y)$ для всех $X, Y \in M_0$.

Доказательство. (i) и (ii) означают, что S_0 порождает аффинное преобразование s пространства $(M, \tilde{V})$, имеющее точку 0 изолированной неподвижной точкой. С учетом соотношения $S_0(\tilde{K}_0) = \tilde{K}_0$, (iii) эквивалентно тому, что $\tilde{K}_0(X, Y) \cdot S_0 = 0$ для любых $X, Y \in M_0$. Согласно доказательству предложения I.39, это означает инвариантность S_0 относительно $\Psi(0)$. $\square$

Мы можем также сформулировать риманов аналог предложения Y.3 (доказательство его очевидно):

Предложение Y.4. Пусть (M, g) — односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство, а $0 \in M$ — фиксированная точка. Римановы регулярные s -структуры на (M, g) , имеющие фиксированную каноническую связность $\tilde{V}$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с линейными преобразованиями $S_0: M_0 \rightarrow M_0$, такими что

- (i) $I_0 - S_0$ есть неособое преобразование M ;

$$\left| \begin{array}{l} (ii) \ S_0(\tilde{R}_0) = \tilde{R}_0, \ S_0(\tilde{T}_0) = \tilde{T}_0; \ S_0(q_0) = q_0; \\ (iii) \ \tilde{R}_0(S_0X, S_0Y) = \tilde{R}_0(X, Y) \text{ для всех } X, Y \in M_0. \end{array} \right.$$

Доказательство. (i) и (ii) означают, что S_0 порождает аффинное преобразование s пространства $(M, \tilde{V})$, имеющее точку o изолированной неподвижной точкой. С учётом соотношения $S_0(\tilde{R}_0) = \tilde{R}_0$, (iii) эквивалентно тому, что $\tilde{R}_0(X, Y) \cdot S_0 = 0$ для любых $X, Y \in M_0$. Согласно доказательству предложения I.39, это означает инвариантность S_0 относительно $\Psi(o)$. $\square$

Мы можем также сформулировать риманов аналог предложения V.3 (доказательство его очевидно):

Предложение V.4. Пусть (M, g) — односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство, а $o \in M$ — фиксированная точка. Римановы регулярные s -структуры на (M, g) , имеющие фиксированную каноническую связность $\tilde{V}$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с линейными преобразованиями $S_0: M_0 \rightarrow M_0$, такими что

$$\left| \begin{array}{l} (i) \ I_0 - S_0 \text{ есть неособое преобразование } M; \\ (ii) \ S_0(\tilde{R}_0) = \tilde{R}_0, \ S_0(\tilde{T}_0) = \tilde{T}_0, \ S_0(q_0) = q_0; \\ (iii) \ \tilde{R}_0(S_0X, S_0Y) = \tilde{R}_0(X, Y) \text{ для всех } X, Y \in M_0. \end{array} \right.$$

Говорят, что симметрии регулярной s -структуры $\{s_x\}$ полупросты, если полупросты все преобразования $S_x: M_x \rightarrow M_x$, $x \in M$. Для этого достаточно, чтобы было полупросто преобразование S_0 для какой-нибудь одной фиксированной точки $o \in M$, т.е. чтобы S_0 было вполне приводимо на $(M_0)^{\mathbb{C}} = M_0 \otimes \mathbb{C}$.

Предложение V.5. Пусть $\{s_x\}$ — допустимая регулярная s -структура на односвязном о.а.с.п. $(M, \tilde{V})$. Существует допустимая регулярная s -структура $\{s'_x\}$ с теми же собственными числами (с учётом кратностей), что и $\{s_x\}$, симметрии которой полупросты.

Доказательство. Рассмотрим преобразование $S_0: M_0 \rightarrow M_0$. Пусть $S_0 = S'_0 + N_0$ — разложение преобразования S_0 на полупростую и нильпотентную части. Тогда для каждого комплексного собственного пространства V_α преобразования S_0 мы имеем $S'_0(Z) = \alpha Z$ для всех $Z \in V_\alpha$. Из предложения IV.38 легко вытекает, что $S'_0(\tilde{T}_0) = \tilde{T}_0$ и

$$\tilde{R}_0(Z, Z') \circ S'_0 = S'_0 \circ \tilde{R}_0(Z, Z'), \quad \tilde{R}_0(S'_0 Z, S'_0 Z') = \tilde{R}_0(Z, Z')$$

для всех комплексных собственных векторов Z, Z' преобразования

S'_0 . Отсюда следует выполнение условий (i) – (iii) предложения v.3. $\square$

В соответствии с определением II.43 будем говорить, что регулярная s -структура $\{s_x\}$ на многообразии M есть структура порядка k ($k \geq 2$), если $(s_x)^k = id$ для всех $x \in M$ и k есть наименьшее число с таким свойством. В случае когда такого k не существует, мы говорим, что $\{s_x\}$ – бесконечного порядка.

Определение Y.6. Обобщённое аффинное симметрическое пространство $(M, \tilde{V})$ называется пространством порядка k ($k \geq 2$), если оно допускает регулярную s -структуру порядка k и не допускает никакой регулярной s -структуры порядка $l < k$. Говорят, что $(M, \tilde{V})$ – бесконечного порядка, если оно допускает лишь структуры бесконечного порядка.

Определение Y.7. Обобщённое аффинное симметрическое пространство $(M, \tilde{V})$ называется унитарным, если оно допускает регулярную s -структуру $\{s_x\}$, у которой все собственные числа суть комплексные числа модуля 1 и симметрии которой полупросты.

Справедливо следующее

Предложение Y.8. Унитарные о.а.с.п. всегда имеют конечный порядок.

Доказательство. Пусть $\{s_x\}$ – допустимая регулярная s -структура на $(M, \tilde{V})$, у которой симметрии s_x полупросты и все собственные числа суть комплексные числа модуля 1. Пусть $p \in M$. Обозначим через $\mathcal{C}^a(s_p)$ замыкание в $A(M, p)$ группы, порождённой симметрией s_p (здесь $A(M, p)$ обозначает подгруппу изотропии группы $A(M, \tilde{V})$ в точке p). Пусть $A(M_p)$ – группа касательных отображений всех аффинных преобразований $g \in A(M, p)$ в точке p . Рассмотрим касательное отображение $S_p = (s_p)_{*p} : M_p \rightarrow M_p$. На M_p существует положительно-определённое скалярное произведение B , инвариантное относительно S_p . Замыкание $\mathcal{C}(S_p)$ группы, порождённой преобразованием S_p в ортогональной группе $O(M_p)$, есть подгруппа в $A(M_p)$. Согласно доказательству леммы 0.7, в $\mathcal{C}^a(s_p)$ имеется симметрия s'_p конечного порядка, и то же рассуждение, что и в теореме 0.12, показывает, что s'_p порождает регулярную s -структуру $\{s'_x\}$. $\square$

Согласно теореме I.33, каждое о.а.с.п. $(M, \tilde{V})$ с фиксированным началом O может быть единственным образом представлено как примарное редуктивное однородное пространство. Это примарное редуктивное пространство будет группой Ли, если и только если M само

есть группа Ли, а $\tilde{V}$ есть $(-)$ -связность Картана. Здесь $\text{Tr}(M) = M_\ell$ совпадает с группой всех левых сдвигов группы M (см. I.34).

Предложение V.9. Пусть K – связная группа Ли, а $\tilde{V}$ – её каноническая связность. Если $(K, \tilde{V})$ есть о.а.с.п., то K разрешима.

Доказательство. Для любой допустимой регулярной s -структуры $\{s_x\}$ на $(K, \tilde{V})$ имеем $\text{Tr}(M, \{s_x\}) = \text{Tr}(K) \simeq K$. Согласно I.13, $\tilde{R} = 0$, и, значит, по теореме II.4I, K разрешима. $\square$

Говорят, что обобщённое аффинное симметрическое пространство $(M, \tilde{V})$ есть пространство полупростого (соотв. разрешимого) типа, если группа трансвекций $\text{Tr}(M)$ полупроста (соотв. разрешима). Теоремы IV.2I и IV.24 можно переформулировать на языке обобщённых аффинных симметрических пространств следующим образом:

Теорема V.10. Пусть $(M, \tilde{V})$ – унитарное о.а.с.п. Тогда $(M, \tilde{V})$ канонически наделяется структурой расслоения, у которого базисное пространство есть о.а.с.п. полупростого типа, а слоями являются автопараллельные подмногообразия, представляющие собой о.а.с.п. разрешимого типа. Связность на базе соподчинена связности $\tilde{V}$.

Далее, если группа голономии многообразия $(M, \tilde{V})$ компактна, то $(M, \tilde{V})$ допускает два взаимно дополнительных слоя $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, которые оба автопараллельны; $\mathcal{F}_1$ состоит из о.а.с.п. полупростого типа, а $\mathcal{F}_2$ – из о.а.с.п. разрешимого типа (все слои наделяются индуцированной связностью).

Доказательство. Используем допустимые периодические регулярные s -структуры. $\square$

* * *

Обобщённое аффинное симметрическое пространство называется примитивным, если оно не является прямым произведением двух обобщённых аффинных симметрических пространств. Согласно предложению IV.13, прямое произведение о.а.с.п. всегда есть о.а.с.п. С другой стороны, если о.а.с.п. $(M, \tilde{V})$ представимо в виде прямого произведения аффинных многообразий, то сомножители будут аффинными редуктивными пространствами (теорема I.3), но они не обязаны быть о.а.с.п., так что $(M, \tilde{V})$ может всё же оказаться примитивным.

Пример V.11. Существуют односвязные аффинные редуктивные пространства $(M_1, \tilde{V}_1)$ и $(M_2, \tilde{V}_2)$, такие что прямое произведение $(M_1 \times M_2, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2)$ есть примитивное о.а.с.п.

Достаточно построить две алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ со следующими свойствами:

(а) $\mathfrak{g}_1$ не допускает автоморфизмов без ненулевых неподвижных векторов;

(б) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ допускает автоморфизм без ненулевых неподвижных векторов;

(с) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ есть единственное разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму.

Действительно, пусть $G_1, G_2, G = G_1 \times G_2$ — соответствующие односвязные группы Ли, а $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2$ — их канонические связности (см. следствие I.36). Обозначим через σ автоморфизм группы G , соответствующий автоморфизму алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда (G, e, σ) есть регулярное однородное s -многообразие (см. II.23), и $(G, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2)$ будет о.а.с.п. в соответствии с теоремой II.25. Оно является произведением аффинных редуктивных пространств $(G_1, \tilde{V}_1)$ и $(G_2, \tilde{V}_2)$.

С другой стороны, если бы $(G_1, \tilde{V}_1)$ было о.а.с.п., то $\tilde{V}_1$ была бы канонической связностью регулярного s -многообразия $(G_1, \{s_x\})$. Согласно теореме II.40, тогда существовало бы примарное регулярное однородное s -многообразие $(\text{Tr}(G_1), (\text{Tr}(G_1))_0, \sigma)$, а именно многообразие вида $((G_1)_e, \text{id}, \sigma)$ (здесь мы ещё раз использовали I.34). Следовательно, G_1 допускало бы автоморфизм σ' , для которого e — изолированная неподвижная точка, что невозможно.

Наконец, предположим, что $(G, \tilde{V}_1 \times \tilde{V}_2) = (M'_1, \tilde{V}'_1) \times (M'_2, \tilde{V}'_2)$ (прямое произведение односвязных аффинных многообразий). Тогда

$$G = \text{Tr}(M'_1 \times M'_2) = \text{Tr}(M'_1) \times \text{Tr}(M'_2)$$

(см. доказательство теоремы I.37). Таким образом, G есть прямое произведение, и единственная возможность при этом такова: $\text{Tr}(M'_1) = G_1$, $\text{Tr}(M'_2) = G_2$ (с точностью до нумерации). Значит, $(M'_i, \tilde{V}'_i)$ совпадает с $(G_i, \tilde{V}_i)$. Произведение наших пространств примитивно.

Построение алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Пусть $\mathfrak{g}_1$ — неабелева двумерная алгебра Ли над K . В $\mathfrak{g}_1$ имеется базис $\{X, Y\}$, такой что $[X, Y] = Y$. Пусть $\mathfrak{g}_2$ — другой экземпляр алгебры $\mathfrak{g}_1$ с соответствующим базисом $\{X', Y'\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ допускает единственное разложение в прямую сумму.

Линейное отображение $S: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, определяемое формулами

$$SX = X' + X, SY = Y', SX' = X - X', SY' = -Y,$$

есть автоморфизм без ненулевых неподвижных векторов (его характе-

ристическим многочленом служит $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 2)$.

С другой стороны, рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g}_1 = (X, Y)$ алгебры $\mathfrak{g}$. Отображение $T: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$ является автоморфизмом, если и только если $TX = X + \beta Y$, $TY = \delta Y$. Один из векторов $(1 - \delta)X + \beta Y, X$ или Y будет ненулевым неподвижным вектором преобразования T .

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ТЕОРИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Роль собственных чисел в теории регулярных s-структур частично была выяснена в конце гл. IV. Изучим теперь собственные числа более подробно. В частности, мы покажем, что и аффинные и римановы обобщённые симметрические пространства допускают регулярные s-структуры с некоторыми "отмеченными" собственными числами. Начнём с ряда абстрактных определений.

Пусть $(\mathbb{C}^n)^0$ обозначает множество всех n-наборов $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ комплексных чисел, таких что $\theta_i \neq 0$, 1 для $i = 1, \dots, n$. Характеристическим многообразием множества $(\mathbb{C}^n)^0$ называется подмногообразие $\mathcal{U} \subset (\mathbb{C}^n)^0$, определяемое каким-нибудь из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i \theta_j &= \theta_k \quad (i \neq j \neq k) \\ \theta_i \theta_j &= 1 \\ \theta_i &= \bar{\theta}_j \end{aligned} \right\} \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Для всякой перестановки $\pi \in \mathfrak{S}_n$ индексов $1, \dots, n$ и всякого подмножества $\mathcal{U} \subset (\mathbb{C}^n)^0$ положим

$$I_\pi(\mathcal{U}) = \{(\theta_{\pi(1)}, \dots, \theta_{\pi(n)}): (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{U}\}.$$

Если $\mathcal{U}$ - характеристическое многообразие, то таковым будет и $I_\pi(\mathcal{U})$ для каждого $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Наконец, положим для каждого $\mathcal{U} \subset (\mathbb{C}^n)^0$

$$\mathfrak{S}(\mathcal{U}) = \bigcup_{\pi \in \mathfrak{S}_n} I_\pi(\mathcal{U}).$$

Под θ -многообразием в $(\mathbb{C}^n)^0$ мы понимаем всякое непустое множество вида $\mathfrak{S}(\mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_r)$, где $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_r$ - характеристические многообразия. Ясно, что в $(\mathbb{C}^n)^0$ имеется лишь конечное число θ -многообразий; они образуют частично упорядоченное по включению множество.

Каждое пересечение $\mathcal{V}_1 \cap \dots \cap \mathcal{V}_p$ характеристических многообразий есть алгебраическое многообразие в $(\mathbb{C}^n)^0$ и потому имеет корректно определённую размерность. Следовательно, и каждое θ -многообразие имеет корректно определённую размерность.

Для $(\theta_i) \in (\mathbb{C}^n)^0$ обозначим через $\mathcal{W}((\theta_i))$ пересечение всех характеристических многообразий, содержащих (θ_i) ; если такого характеристического многообразия нет, то полагаем $\mathcal{W}((\theta_i)) = \emptyset$. Наконец, положим $\mathcal{W}^*((\theta_i)) = \mathfrak{S}(\mathcal{W}((\theta_i)))$. Ясно, что $\mathcal{W}^*((\theta_i))$ есть наименьшее θ -многообразие, содержащее (θ_i) . Легко видеть, что для каждого θ -многообразия $\mathcal{W}$ в $(\mathbb{C}^n)^0$ существует точка $(\theta_i) \in \mathcal{W}$, такая что $\mathcal{W} = \mathcal{W}^*((\theta_i))$. Действительно, пусть $\{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p\}$ — некоторое максимальное множество характеристических многообразий, для которых $\mathcal{W} = \mathfrak{S}(\mathcal{V}_1 \cap \dots \cap \mathcal{V}_p)$. Для любого характеристического многообразия $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p$ пересечение $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ имеет размерность меньшую, чем размерность $\mathcal{W}$. Если $\mathcal{V}_{p+1}, \dots, \mathcal{V}_s$ — все остальные характеристические многообразия в $(\mathbb{C}^n)^0$, то $\mathcal{W} \cap (\mathcal{V}_{p+1} \cup \dots \cup \mathcal{V}_s)$ есть множество меры нуль в $\mathcal{W}$. Теперь достаточно выбрать $(\theta_i) \in \mathcal{W} \setminus (\mathcal{V}_{p+1} \cup \dots \cup \mathcal{V}_s)$.

Пусть $\mathcal{A}^n$ обозначает подмножество всех элементов $(\theta_i) \in (\mathbb{C}^n)^0$ со следующим свойством: если число θ встречается среди чисел $\theta_1, \dots, \theta_n$ m раз, то то же верно и для его комплексно-сопряжённого $\bar{\theta}$. Эквивалентно, точка $(\theta_i) \in (\mathbb{C}^n)^0$ принадлежит $\mathcal{A}^n$, если и только если имеется перестановка $\rho \in \mathfrak{S}_n$, такая что $\rho^2 = id$ и $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$ для $i = 1, \dots, n$. Из (1) видно, что $\mathcal{A}^n$ есть объединение некоторых θ -многообразий в $(\mathbb{C}^n)^0$. Более точно, справедливо следующее утверждение:

Лемма У.12. Для $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$ всегда $\mathcal{W}^*((\theta_i)) \subset \mathcal{A}^n$.

Доказательство. Так как $\mathcal{W}^*((\theta_i)) = \mathfrak{S}(\mathcal{W}((\theta_i)))$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{A}^n) = \mathcal{A}^n$, то достаточно показать, что $\mathcal{W}((\theta_i)) \subset \mathcal{A}^n$. Предположим, что $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$, и пусть $\rho \in \mathfrak{S}$ — перестановка, такая что $\rho^2 = id$, а $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$ при $i = 1, \dots, n$. Другими словами, $\mathcal{W}((\theta_i)) \subset \mathcal{W}_1 \cap \dots \cap \mathcal{W}_n$, где $\mathcal{W}_i$ обозначает характеристическое многообразие в $(\mathbb{C}^n)^0$, задаваемое соотношением $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$. Для $(\theta'_i) \in \mathcal{W}((\theta_i))$ мы имеем $\bar{\theta}'_i = \theta'_{\rho(i)}$ при $i = 1, \dots, n$, откуда $(\theta'_i) \in \mathcal{A}^n$. $\square$

В качестве следствия получаем

Предложение У.13. Каждое минимальное θ -многообразие $\mathcal{W} \subset (\mathbb{C}^n)^0$ принадлежит либо $\mathcal{A}^n$, либо его дополнению $(\mathbb{C}^n)^0 \setminus \mathcal{A}^n$.

Лемма У.14. Если $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$ и $(\theta'_i) \in \mathcal{W}((\theta_i))$, то каждое равенство между числами θ_i влечёт равенство между соответствующими числами θ'_i .

Доказательство. Предположим, что $\theta_j = \theta_k$ для некоторых j, k , $j \neq k$. Так как $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$, то существует перестановка $\rho \in \mathfrak{S}_n$, такая что $\theta_{\rho(j)} = \bar{\theta}_j$, $\theta_{\rho(k)} = \bar{\theta}_k$. Следовательно, $\theta_{\rho(j)} = \theta_k$, $\theta_{\rho(k)} = \bar{\theta}_j$. Так как $(\theta'_i) \in \mathcal{W}(\theta_i)$, те же самые характеристические соотношения выполняются для $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ и, значит, $\theta'_j = \theta'_k$. $\square$

Пусть теперь $(M, \{s_x\})$ – регулярное s-многообразие, $\dim M = n$, а $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – его инфинитезимальная модель. Будем называть n-набор $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in (\mathbb{C}^n)^0$ системой собственных чисел структуры $\{s_x\}$, если все θ_i суть собственные числа линейного преобразования $S: V \rightarrow V$ и каждое его собственное число α встречается в $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ столько раз, какова его кратность. Таким образом, система собственных чисел для $\{s_x\}$ определена однозначно с точностью до перестановки членов.

Так как $S: V \rightarrow V$ – неособое вещественное преобразование и $I - S$ – тоже неособое, то мы всегда имеем $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$.

Предложение V.15. Пусть $(M, \tilde{V})$ – односвязное о.а.с.п. Если $(M, \tilde{V})$ допускает регулярную s-структуру $\{s_x\}$ с системой собственных чисел (θ_i) и если $(\theta'_j) \in \mathcal{W}^*((\theta_i))$, то $(M, \tilde{V})$ допускает регулярную s-структуру $\{s'_x\}$ с системой собственных чисел (θ'_j) .

Доказательство. Пусть $(V, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ – инфинитезимальная модель для $(M, \{s_x\})$. В силу предложения V.5 можно считать, что $S: V \rightarrow V$ вполне приводимо. Обозначим через $\{U_1, \dots, U_n\}$ базис из комплексных собственных векторов преобразования S , отвечающих собственным числам $\theta_1, \dots, \theta_n$ соответственно. Очевидно, существует перестановка $\rho \in \mathfrak{S}_n$, такая что $\rho^2 = \text{id}$, $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$, $\bar{U}_i = U_{\rho(i)}$ для $i = 1, \dots, n$.

Предположим, что $(\theta'_i) \in \mathcal{W}^*((\theta_i))$. Найдём перестановку $\pi \in \mathfrak{S}_n$, такую что $I_\pi((\theta'_i)) \in \mathcal{W}((\theta_i))$. Мы можем переупорядочить числа $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ таким образом, чтобы $(\theta'_i) \in \mathcal{W}((\theta_i))$. Это означает, что каждому характеристическому соотношению, которому удовлетворяют $\theta_1, \dots, \theta_n$, удовлетворяют также и $\theta'_1, \dots, \theta'_n$.

Определим теперь линейное преобразование S' пространства $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ равенством $S'U_i = \theta'_i U_i$, $i = 1, \dots, n$. Нужно показать, что S' индуцирует вещественное преобразование пространства V и что оно удовлетворяет условиям (i) – (iii) предложения V.4.

Прежде всего, мы имеем $\bar{\theta}'_i = \theta'_{\rho(i)}$ для каждого i , и, значит,

$$S' U_i = \theta'_i U_i \Rightarrow S' \bar{U}_i = S' U_{\rho(i)} = \theta'_{\rho(i)} U_{\rho(i)} = \bar{\theta}'_i \bar{U}_i,$$

так что S' получается из некоторого вещественного преобразования пространства V . Далее, пусть $\tilde{T}(U_i, U_j) = \sum_k T_{ij}^k U_k$. Так как $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$, т.е. $S(\tilde{T}(U_i, U_j)) = \tilde{T}(SU_i, SU_j)$, то соотношение $T_{ij}^k \neq 0$ может иметь место, только если $\theta_i \theta_j = \theta_k$, или, иначе, только если $\theta'_i \theta'_j = \theta'_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{T}(S'U_i, S'U_j) &= \theta'_i \theta'_j \tilde{T}(U_i, U_j) = \theta'_i \theta'_j \left(\sum_k T_{ij}^k U_k \right) = \\ &= \sum_k T_{ij}^k \theta'_i \theta'_j U_k = \sum_k T_{ij}^k S'U_k = S'(\tilde{T}(U_i, U_j)), \end{aligned}$$

т.е. $S'(\tilde{T}) = \tilde{T}$.

Далее, $\tilde{R}(SU_i, SU_j) = \tilde{R}(U_i, U_j)$ для любых i, j . Следовательно, $\tilde{R}(U_i, U_j) \neq 0$, только если $\theta_i \theta_j = 1$, или, иначе, только если $\theta'_i \theta'_j = 1$. Отсюда легко выводится, что $\tilde{R}(S'U_i, S'U_j) = \tilde{R}(U_i, U_j)$.

Пусть теперь A — эндоморфизм, такой что $A(S) = 0$. Тогда собственные подпространства преобразования S , соответствующие различным собственным числам, инвариантны относительно A . В силу леммы V.14, каждое максимальное собственное подпространство преобразования S' (отвечающее данному собственному числу) есть прямая сумма некоторых максимальных собственных подпространств преобразования S . Следовательно, максимальные собственные подпространства преобразования S' инвариантны относительно A , и, таким образом, $A(S') = 0$. В частности, $\tilde{R}(X, Y)(S) = 0$ влечёт $\tilde{R}(X, Y)(S') = 0$. Тогда соотношения $\tilde{R}(S'X, S'Y) = \tilde{R}(X, Y)$ и $\tilde{R}(X, Y)(S') = 0$ дают $\tilde{R}(S'X, S'Y)S'Z = S'(\tilde{R}(X, Y)Z)$, т.е. $S'(\tilde{R}) = \tilde{R}$. Это завершает доказательство. $\square$

Рассмотрим теперь частично упорядоченное (по включению) множество всех θ -многообразий в $(\mathbb{C}^n)^0$, и пусть $\mathcal{E}^n$ обозначает объединение всех минимальных θ -многообразий, содержащихся в $\mathcal{A}^n$ (см. предложение V.13). Из предложения V.15 вытекает следующая

Теорема V.16. Каждое односвязное о.а.с.п. $(M, \tilde{V})$ допускает регулярную s -структуру, система собственных чисел которой принадлежит $\mathcal{E}^n$.

Обозначим через $\mathcal{B}^n$ подмножество всех n -наборов $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in (\mathbb{C}^n)^0$, таких что $|\theta_1| = \dots = |\theta_n| = 1$.

Лемма V.17. Если $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$, то $\mathcal{W}^*((\theta_i)) \subset \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$.

Доказательство. Пусть $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$, $(\theta'_j) \in \mathcal{W}^*((\theta_i))$. Перепорядочим числа θ'_j таким образом, чтобы $(\theta'_i) \in \mathcal{W}((\theta_i))$. Так как $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$, то имеется перестановка $\rho \in \mathfrak{S}_n$, такая что $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$ для $i=1, \dots, n$. Далее, поскольку $|\theta_i| = 1$, то $\theta_i \theta_{\rho(i)} = 1$ и, значит, $\theta'_i \theta'_{\rho(i)} = 1$ для $i=1, \dots, n$. Так как имеют место равенства $\bar{\theta}'_i = \theta'_{\rho(i)}$, то мы видим, что $|\theta'_i| = 1$ для $i=1, \dots, n$. Таким образом, $(\theta'_j) \in \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$. $\square$

Предложение V.18. Каждое минимальное θ -многообразие $\mathcal{W} \subset (\mathbb{C}^n)^0$ принадлежит либо пересечению $\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$, либо его дополнению в $(\mathbb{C}^n)^0$.

Пусть $\mathcal{D}^n$ обозначает объединение всех минимальных θ -многообразий, содержащихся в $\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$. Из определения V.7 и предложения V.15 вытекает

Теорема V.19. Каждое односвязное унитарное о.а.с.п. $(M, \tilde{V})$ допускает регулярную s -структуру, система собственных чисел которой принадлежит $\mathcal{D}^n$.

Теперь мы можем установить аналогичную теорему для обобщённых симметрических римановых пространств.

Теорема V.20. Каждое односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство (M, g) допускает регулярную s -структуру, система собственных векторов которой принадлежит $\mathcal{D}^n$.

Доказательство. Пусть $\{s_x\}$ — допустимая s -структура пространства (M, g) , а $\tilde{V}$ — её каноническая связность. Тогда система собственных чисел структуры $\{s_x\}$ принадлежит $\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$, так что $(M, \tilde{V})$ — унитарное о.а.с.п. Из доказательства предложения V.15 (с учётом предложения V.4) легко следует, что для каждого $(\theta'_j) \in \mathcal{W}^*((\theta_i))$ пространство (M, g) допускает регулярную s -структуру $\{s'_x\}$ с системой собственных чисел (θ'_j) , откуда и вытекает наш результат. $\square$

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Цель этого параграфа — выяснить структуру множества $\mathcal{D}^n$. Для этого мы разовьём "аддитивную теорию" множества $\mathcal{B}^n$ и его θ -многообразий. Рассмотрим диффеоморфизм f открытого единичного куба $(I^n)^0 \subset \mathbb{R}^n$ на $\mathcal{B}^n$, заданный формулой

$$f([x^1, \dots, x^n]) = (\exp(2\pi x^1 \sqrt{-1}), \dots, \exp(2\pi x^n \sqrt{-1})). \quad (2)$$

При помощи f каждое θ -многообразие $\mathcal{W} \in \mathcal{B}^n$ можно представить как конечную "связку" линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$, имеющих нену-

стое пересечение с $(I^n)^0$. Таким образом, мы можем описать структуру $\mathcal{D}^n$ в терминах линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

Начнём с одного геометрического результата, называемого основной леммой. Пусть Λ_n — некоторое конечное множество линейных подпространств декартова пространства $\mathbb{R}^n[x^1, \dots, x^n]$ со следующими свойствами:

- (a) $K, L \in \Lambda_n \implies K \cap L \in \Lambda_n$;
- (b) Λ_n содержит все гиперплоскости, задаваемые уравнениями вида $x^i - x^j = 0$ или $x^i + x^j = 1$, где $1 \leq i < j \leq n$.

Пусть $(I^n)^0$ — открытый единичный куб:

$$(I^n)^0 = \{ [x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{R}^n : 0 < x^i < 1, i = 1, \dots, n \}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}^n$ подмножество всех нульмерных подпространств из Λ_n ; они будут называться решёточными точками в Λ_n .

Основная лемма У.21. Каждое линейное подпространство $K \in \Lambda_n$ размерности $k > 0$, удовлетворяющее условию $K \cap (I^n)^0 \neq \emptyset$, содержит собственное (т.е. отличное от $\mathbb{R}^n$) подпространство $L \in \Lambda_n$ размерности $\ell < k$, такое что $L \cap (I^n)^0 \neq \emptyset$. В частности, если $K \in \Lambda_n$, $K \cap (I^n)^0 \neq \emptyset$, то $K \cap (I^n)^0$ содержит хотя бы одну решёточную точку $p \in \mathcal{L}_n$.

Для доказательства основной леммы нам потребуются некоторые другие леммы.

Лемма У.22 (обобщённая аксиома Паша). Пусть $\Delta^{(r)}$ есть r -мерный симплекс в евклидовом пространстве E^r , и пусть линейное подпространство $K \subset E^r$, $\dim K > 0$, пересекает внутренность симплекса $\Delta^{(r)}$. Тогда K пересекает внутренность некоторой $(r-1)$ -мерной грани $\Delta_i^{(r-1)}$ и внутренность некоторой ℓ -мерной грани $\Delta_j^{(\ell)}$ ($\ell \leq r-1$), таких что $\Delta_j^{(\ell)} \not\subset \Delta_i^{(r-1)}$.

Доказательство предоставляется читателю. $\square$

Пусть I^n ($n \geq 2$) обозначает замкнутый n -мерный единичный куб:

$$I^n = \{ [x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, \dots, n \}.$$

Лемма У.23. Куб I^n допускает триангуляцию из $2^{n-1} \cdot n!$ симплексов $\Delta_i^{(n)}$ размерности n , таких что:

- (a) каждая $(n-1)$ -мерная грань каждого симплекса $\Delta_i^{(n)}$ со-

держится в одной из следующих гиперплоскостей:

$$x^i = 0 \text{ или } x^i = 1, \text{ или } x^i - x^j = 0 \quad (i \neq j), \\ \text{или } x^i + x^j = 1 \quad (i \neq j), \text{ где } i, j = 1, \dots, n; \quad (3)$$

(b) в точности одна из $(n-1)$ -мерных граней каждого симплекса $\Delta_i^{(n)}$ принадлежит границе ∂I^n куба I^n ;

(c) центр куба I^n есть общая вершина всех симплексов $\Delta_i^{(n)}$.

Доказательство. Для $n=2$ требуемая триангуляция куба I^2 задаётся шестью прямыми: $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^1 = 1$, $x^2 = 1$, $x^1 - x^2 = 0$, $x^1 + x^2 = 1$. Допустим, что лемма V.23 верна для некоторого n , и рассмотрим куб I^{n+1} . Пусть T — триангуляция куба I^n , удовлетворяющая условиям леммы V.20. Зададим отображение $f_{i,\alpha}: I^n \rightarrow I^{n+1}$ ($i = 1, \dots, n+1$; $\alpha = 0, 1$) формулой

$$f_{i,\alpha}(x^1, \dots, x^n) = [x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^n].$$

Тем самым мы получим триангуляцию $f_{i,\alpha}(T)$ каждой грани $f_{i,\alpha}(I^n)$ куба I^{n+1} , т.е. получим триангуляцию границы $\partial(I^{n+1})$. Теперь определим триангуляцию T' куба I^{n+1} так: каждый $(n+1)$ -мерный симплекс $\Delta_i^{(n+1)}$ триангуляции T' имеет центр $[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}]$ куба I^{n+1} вершиной, а n -мерный симплекс граничной триангуляции — гранью. Очевидно, что T' состоит из $2(n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! = 2^n \cdot (n+1)!$ симплексов $\Delta_i^{(n+1)}$ и что выполнены условия (b), (c). Проверка условия (a) предоставляется читателю. $\square$

Лемма V.24. Пусть T — триангуляция куба I^n , удовлетворяющая условиям леммы V.23. Далее, пусть Λ_n — множество линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$, такое как в основной лемме. Тогда каждый k -мерный симплекс $\Delta_j^{(k)}$ ($k \leq n-1$) триангуляции T либо принадлежит границе ∂I^n , либо содержится в некотором линейном подпространстве $K \in \Lambda_n$ и имеет точку $[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}]$ вершиной.

Доказательство. Каждый k -мерный симплекс $\Delta_i^{(k)}$ триангуляции T есть пересечение некоторого числа $(n-1)$ -мерных симплексов триангуляции T . Следовательно, k -мерная плоскость L , содержащая $\Delta_i^{(k)}$, определяется системой $n-k$ уравнений вида (3). Далее, если $\Delta_i^{(k)}$ не принадлежит границе ∂I^n , то он имеет точку $[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}]$ вершиной. Отсюда следует, что L задаётся системой вида $x^i - x^j = 0$, $x^\ell + x^m = 1$ ($\ell \neq m$) и, таким образом, принадлежит множеству Λ_n . $\square$

Доказательство основной леммы. Пусть T — триангуляция куба I^n ,

построенная в лемме Y.23. Предположим, что подпространство $K \in \Lambda_n$ размерности $k > 0$ таково, что $K \cap (I^n)^o \neq \emptyset$. Пусть $\Delta_i^{(r)} \in T$ — симплекс минимальной размерности, содержащий некоторую точку из $K \cap (I^n)^o$ в качестве своей внутренней точки, и $L \supset \Delta_i^{(r)}$ — соответствующая r -мерная плоскость. Согласно лемме Y.24, $L \in \Lambda_n$ и $[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}]$ есть вершина симплекса $\Delta_i^{(r)}$.

Допустим теперь, что $K \subset L$. Тогда, в силу леммы Y.22, k -мерная плоскость K пересекает внутренности некоторых граней $\Delta_u^{(r-1)}$ и $\Delta_v^{(\ell)}$, таких что $\ell \leq r-1$ и $\Delta_v^{(\ell)} \not\subset \Delta_u^{(r-1)}$. По крайней мере один из симплексов $\Delta_u^{(r-1)}$, $\Delta_v^{(\ell)} \in T$ содержит вершину $[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}]$ и, значит, не принадлежит границе ∂I^n . Но тогда он содержит в своей внутренней точке некоторую точку $q \in K \cap (I^n)^o$, что противоречит минимальности r .

Итак, $K \not\subset L$ и подпространство $P = K \cap L$ есть собственное подпространство в K . Мы имеем $P \in \Lambda_n$ и $P \cap (I^n)^o \neq \emptyset$, что и завершает доказательство. $\square$

Теорема Y.25. Объединение $\mathcal{D}^n$ всех минимальных θ -многообразий из $\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$ есть конечное множество. Кроме того, каждый элемент $(\theta_i) \in \mathcal{D}^n$ имеет конечный порядок, т.е. $(\theta_1)^k = (\theta_2)^k = \dots = (\theta_n)^k = 1$, для некоторого целого k .

Доказательство. Рассмотрим множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$, описываемых следующими линейными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x^i + x^j - x^k &= 0, \quad x^i + x^j - x^k = 1 & (i \neq j = k; i, j, k = 1, \dots, n), \\ x^i + x^j &= 1, \quad x^i - x^j = 0 & (i \neq j; i, j = 1, \dots, n), \\ 2x^i &= 1 & (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} (4)$$

Пусть Λ_n обозначает множество всех линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$, которые являются пересечениями конечного числа указанных выше гиперплоскостей. Для каждого $L \in \Lambda_n$ рассмотрим все гиперплоскости вида (4), содержащие L . Таким образом, каждое подпространство $L \in \Lambda_n$ характеризуется некоторым единственным (максимальным) множеством $\mu(L)$ линейных неоднородных уравнений вида (4); уравнения из этого множества могут быть линейно-зависимы. Для каждого подпространства L рассмотрим также соответствующее множество $h(L)$ линейных однородных уравнений. Будем говорить, что два подпростра-

нства $L, L' \in \Lambda_n$ сопряжены, если $h(L) = h(L')$.

Лемма V.26. Пусть $L \in \Lambda_n$ таково, что $L \cap (I^n) \neq \emptyset$ и $f(L \cap (I^n)^0) \subset \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$. Тогда все уравнения вида $x^i - x^j = 0$ из множества $\mu(L)$ являются следствиями уравнений вида $x^k + x^l = 1$ из $\mu(L)$.

Доказательство. Пусть $[a^1, \dots, a^n] \in L \cap (I^n)^0$ — точка общего положения, т.е. точка, не принадлежащая линейному подпространству $L' \in \Lambda_n$, для которого $\dim L' < \dim L$. Положим $(\theta_1, \dots, \theta_n) = f([a^1, \dots, a^n])$. Тогда $(\theta_i) \in \mathcal{A}^n$, и имеется перестановка ρ индексов $1, \dots, n$, такая что $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$ при $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $a^i + a^{\rho(i)} = 1$ для всех i . Так как $[a^1, \dots, a^n]$ — точка общего положения в L , то мы заключаем, что $\mu(L)$ содержит все соотношения $x^i + x^{\rho(i)} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Итак, множество $\mu(L)$ содержит вместе с каждым уравнением $x^i - x^j = 0$ также уравнение $x^i + x^{\rho(i)} = 1$. Отсюда и следует наш результат. $\square$

Для любой перестановки $\pi \in \mathfrak{S}$ рассмотрим преобразование

$$I_\pi: [x^1, \dots, x^n] \mapsto [x^{\pi(1)}, \dots, x^{\pi(n)}]$$

пространства $\mathbb{R}^n$ и для $L \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\mathfrak{S}(L) = \bigcup_{\pi \in \mathfrak{S}_n} I_\pi(L).$$

Лемма V.27. Если $\mathcal{W} \in \mathcal{B}^n$ есть θ -многообразие, то

$$f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathfrak{S}(L_1 \cup \dots \cup L_r) \cap (I^n)^0,$$

где $L_1, \dots, L_r \in \Lambda_n$ образуют полное множество взаимно сопряжённых подпространств. Обратно, если $L_1, \dots, L_r \in \Lambda_n$ — полное множество взаимно сопряжённых подпространств и

$$f(L_\alpha \cap (I^n)^0) \subset \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n \quad \text{для } \alpha = 1, \dots, r,$$

то $f(\mathfrak{S}(L_1 \cup \dots \cup L_r) \cap (I^n)^0)$ — либо пустое множество, либо θ -многообразие.

Доказательство. Подставляя в (1)

$$\theta_i = \exp(2\pi x^i \sqrt{-1}), \quad \text{где } x^i \in (0, 1) \quad \text{для } i = 1, \dots, n,$$

мы получаем лишь соотношения вида (4); отсюда следует первое утверждение. Обратно, пусть $L_1, \dots, L_r \in \Lambda_n$ — полное множество

взаимно сопряжённых подпространств. Предположим, что

$$f[\mathcal{S}(L_1 \cup \dots \cup L_r) \cap (I^n)^0 \neq \emptyset, f(L_\alpha \cap (I^n)^0) \subset \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$$

для $\alpha = 1, \dots, r$. Достаточно показать, что $f[(L_1 \cup \dots \cup L_r) \cap (I^n)^0]$ есть пересечение характеристических многообразий (1). Выберем $\alpha \in \{1, \dots, r\}$, такое что $L_\alpha \cap (I^n)^0 \neq \emptyset$. Из леммы Y.26 следует, что L_α есть пересечение гиперплоскостей вида $x^i + x^j - x^k = 0$ (или 1) и $x^l + x^m = 1$. Поэтому $f(L_\alpha \cap (I^n)^0)$ есть открытое подмножество в пересечении соответствующих характеристических многообразий $\theta_i, \theta_j = \theta_k, \theta_l, \theta_m = 1$ и $\mathcal{B}^n$, или, иначе, это есть открытое подмножество пересечения характеристических многообразий вида $\theta_i, \theta_j = \theta_k, \theta_l, \theta_m = 1, \theta_l = \bar{\theta}_m$. Так как сопряжённое множество $\{L_1, \dots, L_r\}$ полно, мы видим, что $f[(L_1 \cup \dots \cup L_r) \cap (I^n)^0]$ совпадает с этим пересечением. $\square$

Лемма Y.28. Если $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$ есть минимальное θ -многообразие, то $f^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{L}_n$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$ — произвольное θ -многообразие. Положим $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{S}(L_1 \cup \dots \cup L_r) \cap (I^n)^0$. Допустим, что $\dim L_1 > 0$, $L_1 \cap (I^n)^0 \neq \emptyset$. Множество Λ_n удовлетворяет условиям основной леммы. Таким образом, найдётся решёточная точка $p \in L_1 \cap (I^n)^0$. Ясно, что множество $L_1 \cup \dots \cup L_r$ содержит все решёточные точки $p_1, \dots, p_s$, которые сопряжены точке p , и $f(\mathcal{S}\{p_1, \dots, p_s\} \cap (I^n)^0) \subset \mathcal{W}$ есть θ -многообразие (см. лемму Y.27). Итак, $\mathcal{W}$ не может быть минимальным, откуда и следует наша лемма. $\square$

Завершение доказательства теоремы Y.25. Согласно лемме Y.28, существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathcal{D}^n$ и множеством $\mathcal{L}^n \cap (I^n)^0$. Значит, $\mathcal{D}^n$ конечно. Далее, все решёточные точки из Λ_n имеют рациональные координаты, и, следовательно, точки (θ_i) из $\mathcal{D}^n$ суть элементы конечного порядка. $\square \square$

В дополнение к теореме Y.25 мы докажем (чуть ниже) следующую теорему:

Теорема Y.29. Пусть $k(n)$ обозначает максимум порядков всех элементов из $\mathcal{D}^n$. Тогда $k(n) \leq S^{n/4}$ для чётных n и $k(n) \leq 2 \cdot 5^{(n-1)/4}$ для нечётных n .

Пусть $[a^1, \dots, a^n] \in (I^n)^0$ — решёточная точка из Λ_n . Если $(\theta_1, \dots, \theta_n) = f([a^1, \dots, a^n]) \in \mathcal{A}^n$, то существует

перестановка $\rho \in \mathfrak{S}_n$, такая что $\rho^2 = id$, а $\bar{\theta}_i = \theta_{\rho(i)}$, т.е. $a^i + a^{\rho(i)} = 1$ для $i = 1, \dots, n$. Допустим, что $\rho(i) \neq i$ для $i = 1, \dots, 2r$ и $\rho(j) = j$ для $j = 2r + 1, \dots, n$. Перенумерацией можно добиться того, чтобы $0 < a^i < \frac{1}{2}$ для $i = 1, \dots, r$ и $\rho(i) = r + i$ для $i = 1, \dots, r$. Разумеется, $a^{2r+1} = \dots = a^n = \frac{1}{2}$. Положим $b^i = a^i$ для $i = 1, \dots, r$ и $b^j = a^{r+j}$ для $j = r + 1, \dots, n - r$. Решёточная точка $[a^1, \dots, a^n]$ может быть найдена по величинам $b^1, \dots, b^{n-r}$. С другой стороны, числа $a^1, \dots, a^n$ определяются единственным образом множеством $\mu([a^i])$ линейных уравнений вида (4). Следовательно, соответствующие величины $b^1, \dots, b^r, b^{r+1}, \dots, b^{n-r}$ единственным образом определяются некоторым множеством уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} y^i + y^j - y^k &= 0, y^i + y^j + y^k = 1 & (i \neq j \neq k; i, j, k = 1, \dots, n-r), \\ 2y^i - y^k &= 0, 2y^i + y^k = 1, y^i - y^k = 0 & (i \neq k, i, k = 1, \dots, n-r), \\ 2y^i &= 1 & (i = r+1, \dots, n-r). \end{aligned} \right\} (5)$$

Это значит, что можно выбрать систему из $n - r$ независимых уравнений вида (5) и затем подсчитать $b^1, \dots, b^{n-r}$ по правилу Крамера. Пусть Δ — матрица коэффициентов левой части вышенаписанной системы, и пусть $|\Delta|$ обозначает абсолютную величину определителя $\det \Delta$. Ясно, что если мы найдём верхнюю границу для $|\Delta|$, то получим тем самым верхнюю границу для порядка величин (θ_i) .

Далее, каждая матрица Δ принадлежит к некоторому специальному классу матриц, определяемому следующим образом. Введём вес строки (соотв. столбца) квадратной матрицы Δ как сумму абсолютных величин всех элементов этой строки (соотв. столбца). Говорят, что квадратная матрица Δ есть матрица типа δ , если её элементы суть целые числа, удовлетворяющие условию $|a_j^i| \leq 2$ и вес каждой её строки ≤ 3 . Для всякой n -матрицы Δ_n типа δ мы, очевидно, имеем $|\Delta_n| \leq 3^n$. Более точно, справедлива

Лемма V.30. Для произвольной матрицы Δ_n типа δ с n строками	$ \Delta_n \leq 5^{n/2}.$	(6)
---	----------------------------	-----

Доказательство носит технический характер, и мы его опустим (см. [К9], лемма 7). $\square$

Доказательство теоремы У.29. Пусть задана точка $(\theta_i) \in \mathcal{D}^n$. Рассмотрим решёточную точку $[a^1, \dots, a^n] = f^{-1}((\theta_i))$. Можно найти систему $n - r$ независимых уравнений вида (5), определяющую соответствующие величины $b^1, \dots, b^r, b^{r+1}, \dots, b^{n-r}$. Не теряя общности, мы можем предполагать, что все уравнения вида $2y^j = 1$ ($j = r+1, \dots, n-r$) входят в эту систему. Матрица коэффициентов левой части системы имеет вид

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc} \Delta_r & & & * \\ \hline & & & \\ \hline 0 & & 2 & \\ & & & \ddots \\ & & & 2 \end{array} \right),$$

где Δ_r - матрица типа δ с r строками и столбцами. Решая эту систему по правилу Крамера, получаем для $i = 1, \dots, r$

$$|y^i| = |D_i| / (2^{n-2r} \cdot |\Delta_r|),$$

где D_i - матрица, полученная заменой i -го столбца матрицы D некоторым столбцом, состоящим из чисел 0 и ± 1 . Ясно, что если $n - 2r > 0$, то $|D_i| = 2^{n-2r-1} \cdot n_i$, где n_i - целое число. Следовательно, $b^i = n_i / (2 |\Delta_r|)$ при $i = 1, \dots, r$ и $b^j = \frac{1}{2}$ при $j = r+1, \dots, n-r$. Итак, если $n - 2r > 0$, то $2 |\Delta_r| \cdot b^i$ есть целое число при $i = 1, \dots, n-r$ и $2 |\Delta_r| a^j$ также есть целое число при $j = 1, \dots, n$. Если $n - 2r = 0$, то $|\Delta_r| b^i$ - целое число при $i = 1, \dots, r$, равно как и $|\Delta_r| a^j$ при $j = 1, \dots, n$. Далее, если n нечётно, то $n - 2r > 0$ и (θ_i) имеет порядок $k \leq 2 |\Delta_r|$, где $|\Delta_r| \leq 5^{r/2} \leq 5^{(n-1)/4}$ согласно лемме У.30. Если n чётно, то (θ_i) будет либо порядка $k \leq |\Delta_r|$, где $r = n/2$, либо порядка $k \leq 2 |\Delta_r|$, где $r \leq (n-2)/2$. В обоих случаях $k \leq 5^{n/4}$. Это завершает доказательство. $\square\square$

ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ

В качестве приложений нашей теории, немедленно вытекающих из теорем У.19, У.20, У.25, У.29, приведём следующие две теоремы:

Теорема У.31. Пусть (M, q) - односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство размерности n , и пусть k -

его порядок. Тогда $k \leq 5^{n/4}$ для чётного n и $k \leq 2 \cdot 5^{(n-1)/4}$ для n нечётного.

Теорема У.32. Пусть $(M, \tilde{V})$ – односвязное унитарное о.а.с.п. размерности n , и пусть k – его порядок. Тогда $k \leq 5^{n/4}$ при чётном n и $k \leq 2 \cdot 5^{(n-1)/4}$ при n нечётном.

Идеи, развитые в этой главе, можно использовать и в более общей ситуации, а именно для изучения так называемых "периодических" тензорных структур (такие тензорные структуры естественным образом возникают в римановой геометрии).

Пусть V – вещественное векторное пространство, а $T_1, \dots, T_r$ – тензоры на V типов $(1, n_1), \dots, (1, n_r)$ соответственно (под тензором типа (m, n) мы понимаем здесь тензор, m раз контравариантный и n раз ковариантный). Ясно, как определить автоморфизм тензорной структуры $\mathcal{T} = (V; T_1, \dots, T_r)$. Структура $\mathcal{T}$ называется периодической, если она допускает периодический автоморфизм без ненулевых неподвижных векторов. Порядок $k(\mathcal{T})$ периодической структуры $\mathcal{T}$ определяется как минимальный порядок такого автоморфизма.

Пусть $\prod_n^{n_1, \dots, n_r}$ обозначает класс всех периодических тензорных структур $(V, T_1, \dots, T_r)$, где $n_1, \dots, n_r$ фиксированы и $\dim V = n$, а $\tilde{\prod}_n^{n_1, \dots, n_r}$ – некоторый его подкласс (определяемый дополнительными условиями, наложенными на тензоры $T_1, \dots, T_r$). Тогда можно развить соответствующую "мультипликативную" и "аддитивную" теории собственных чисел и найти, исходя из них, оценки чисел $\max \{ k(\mathcal{T}) : \mathcal{T} \in \tilde{\prod}_n^{n_1, \dots, n_r} \}$.

Для основного класса $\prod_n^{n_1, \dots, n_r}$ соответствующие оценки были найдены в [К11]. Именно,

$$k(\mathcal{T}) \leq (m+1)^{(n+1)/2} \quad \text{для каждой } \mathcal{T} \in \prod_n^{n_1, \dots, n_r}, \quad (7)$$

где $m = \max \{ n_1, \dots, n_r, 1 \}$.

Последний результат имеет применение в локальной римановой геометрии. Пусть (M, g) – аналитическое риманово многообразие. Точка $p \in M$ называется свободной, если существует локальная изометрия $\psi : U_p \rightarrow U_p'$, такая что $\psi(p) = p$ и p есть изолированная неподвижная точка изометрии ψ (кратко, мы говорим в таком случае о локальной симметрии ψ в точке p , см. 0.30).

Нетрудно видеть, что в свободной точке $p \in M$ всегда существует периодическая локальная симметрия ψ' . Определим порядок

$\mathfrak{A}(p)$ свободной точки $p \in M$ как наименьшее целое число $k \geq 2$, для которого существует локальная симметрия ψ в точке p со свойством $\psi^k = \text{id}$.

Если (M, g) — локально-симметрическое пространство, то все точки из M свободны и $\mathfrak{A}(p) = 2$ для всех $p \in M$. В общем случае можно дать грубую оценку числа $\mathfrak{A}(p)$, исходя из вышеизложенного и используя наши комбинаторные результаты. Положим

$$G_p^{(i)} = \{A \in GL(M_p) : A(g_p) = g_p, A(R_p) = R_p, \dots, A(\nabla^{(i)} R_p) = \nabla^{(i)} R_p\},$$

где ∇ обозначает риманову связность в (M, g) , а R — тензорное поле кривизны. Мы имеем бесконечную последовательность групп Ли $G_p^{(0)} \supset G_p^{(1)} \supset \dots$. Так как $G_p^{(0)}$ компактна, то число различных групп в нашей последовательности всегда конечно. Под порядком устойчивости $s(p)$ мы будем понимать минимальное целое число $\ell \geq 0$, такое что $G_p^{(\ell)} = G_p^{(\ell+1)} = \dots$ и т.д. Справедлива

Теорема V.33. Пусть (M, g) — аналитическое риманово многообразие, а $p \in M$ — свободная точка. Тогда

$$\mathfrak{A}(p) \leq (s(p) + 4)^{(1 + \dim M)/2}.$$

Доказательство. Так как (M, g) аналитично, то неособое преобразование $A : M_p \rightarrow M_p$ порождает локальную изометрию в точке p , если и только если $A \in \bigcap_{i=0}^{\infty} G_p^{(i)}$. Далее, в соответствии с определением $s(p)$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} G_p^{(i)} = G_p^{(s(p))}.$$

Таким образом, A совпадает с касательным отображением ψ_{*p} локальной изометрии ψ , если и только если A есть автоморфизм тензорного объекта $(M_p, g_p, R_p, \dots, \nabla^{(s(p))} R_p)$. Для периодов этого объекта мы получаем ту же самую оценку (7). Действительно, роль скалярного произведения g_p несущественна, а оставшаяся часть объекта представляет собой тензорную структуру изученного выше типа. Максимум чисел $n_1, \dots, n_r$ равен здесь $m = s(p) + 3$, откуда и следует наш результат. $\square$

Другое приложение касается периодических автоморфизмов косо-симметрических неассоциативных вещественных алгебр. В периодическом случае мы получаем ту же числовую оценку, что и в теореме V.31 (подробности см. в [K9]).

Как правило, наши оценки достаточно точны для "больших" под-

классов основного класса $\prod_n^{n_1, \dots, n_r}$ и довольно грубы для узких специальных подклассов тензорных структур (где тензоры $T_1, \dots, T_r$ подчинены более сложным условиям). К сожалению, как раз такой случай имеет место для наших инфинитезимальных s -многообразий или для алгебр Ли. Фактически реальный рост максимального порядка в теоремах У.31, У.32 может быть весьма далёк от экспоненциального.

Проблема У.34. Дайте явную конструкцию множества $\mathcal{D}^n$ для произвольного n .

Проблема У.35. Как известно из теоремы У.25, все минимальные θ -многообразия, содержащиеся в $\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}^n$, являются конечными множествами. С другой стороны, среди минимальных θ -многообразий, содержащихся в $\mathcal{A}^n \cap (\mathbb{R}^n)^0$, имеются многообразия размерности 1 (см. гл. VII). Существуют ли и другие типы минимальных θ -многообразий в $(\mathbb{C}^n)^0$?

Проблема У.36. Рассмотрим класс всех обобщённых симметрических римановых пространств данной размерности n (т.е. отбросим ограничение односвязности). Останутся ли порядки по-прежнему ограниченными сверху?



Литература: первоисточники — [К8], [К9], [К11]; дополнительные источники — [Ф3]', [К6], [Lo2].

Глава VI

Классификация обобщённых симметрических римановых пространств малых размерностей

ПРОЦЕДУРА КЛАССИФИКАЦИИ

Мы опишем в этом параграфе некую процедуру, позволяющую получить полный список односвязных неприводимых обобщённых симметрических римановых пространств данной (малой) размерности n .

Прежде всего, каждое рассматриваемое пространство может быть представлено регулярным римановым s -многообразием, система собственных чисел которого принадлежит $\mathcal{D}^n$ (теорема V.20), а последнее может быть представлено некоторым римановым инфинитезимальным s -многообразием (теорема III.39). Итак, нам надо классифицировать все римановы инфинитезимальные s -многообразия $(V, g, \tilde{S}, \tilde{K}, \tilde{T})$, которые неприводимы и таковы, что множество собственных чисел преобразования $\tilde{S}$ принадлежит $\mathcal{D}^n$. В силу теоремы IV.43, можно ограничиться подмножеством $\mathcal{D}^{*n} \subset \mathcal{D}^n$, состоящим из всех наборов $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{D}^n$, для которых множество $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ неприводимо в смысле определения IV.42.

Мы начинаем нашу процедуру с подсчёта всех существенно различных элементов множества $\mathcal{D}^{*n}$. Имеется стандартный систематический способ такого подсчёта:

(а) Для каждого $r = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ последовательно выписываем систему уравнений (5) из V.29.

(б) Решаем все возможные подсистемы из $n - r$ уравнений с $n - r$ неизвестными $y^1, \dots, y^{n-r}$, каждая из которых содержит все уравнения вида $2y^i = 1$, $i = r + 1, \dots, n - r$, и имеет ненулевой определитель.

(с) Для каждого r выписываем все решения $[b^1, \dots, b^r, \dots, b^{n-r}]$, такие что $0 < b^1 \leq b^2 \leq \dots \leq b^r < \frac{1}{2}$, и образуем соответствующие n -наборы $(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

(д) Удаляем все приводимые n -наборы (θ_i) .

На практике эта процедура может быть сокращена при помощи различных приёмов.

Далее, нас интересуют лишь те обобщённые симметрические пространства, которые не являются локально-симметрическими. По этой причине мы будем искать только инфинитезимальные s -многообразия $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ с $\tilde{T} \neq 0$ (см. следствие III.42), а также исключим элемент $(-1, \dots, -1) \in \mathcal{D}^{*n}$.

Фиксируем какой-нибудь элемент $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{D}^{*n}$ и выберем перестановку ρ чисел $\{1, \dots, n\}$ так, чтобы $\rho^2 = id$, а $\theta_{\rho(i)} = \bar{\theta}_i$. Пусть $\{U_1, \dots, U_n\}$ — базис в V^c , такой что $U_{\rho(i)} = U_i$.

Определим $S: V \rightarrow V$ формулой $SU_i = \theta_i U_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$g(U_i, U_j) = \alpha_{ij}, \quad \tilde{T}(U_i, U_j) = \sum_k \beta_{ij}^k U_k, \quad \text{для } i, j = 1, \dots, n;$$

здесь $\alpha_{ij}, \beta_{ij}^k$ — произвольные комплексные числа, требуется лишь, чтобы не все β_{ij}^k равнялись нулю. Выразим соотношения

$$S(g) = g, \quad S(\tilde{T}) = \tilde{T}, \quad \tilde{T}(X, Y) = -\tilde{T}(Y, X), \quad g(X, Y) = g(Y, X)$$

и условие положительности g при помощи переменных $\alpha_{ij}, \beta_{ij}^k$. Выразим также условие того, что $g, \tilde{T}$ — линейные (комплексные) продолжения вещественных тензоров пространства V . В результате либо окажется, что удовлетворить всем условиям невозможно, либо g и $\tilde{T}$ всё ещё будут зависеть от некоторого числа переменных. Далее попытаемся возможными преобразованиями базиса $\{U_1, \dots, U_n\}$ привести g и $\tilde{T}$ к канонической форме, минимизируя общее число переменных в их выражениях. Как правило, приходится различать конечное число случаев, ведущих к различным каноническим формам (типам). В действительности каждая каноническая форма определяет некоторое семейство орбит относительно представления подгруппы $G \subset GL(V)$ в пространстве всех допустимых пар тензоров $(g, \tilde{T})$. Спецификация всех переменных в канонической форме означает выбор определённой орбиты.

Рассмотрим канонический тип $(g, \tilde{T})$, зависящий от некоторых переменных. Найдём алгебру Ли $\mathfrak{h}_1$ всех эндоморфизмов A пространства V , таких что $A(S) = 0$, $A(g) = 0$, $A(\tilde{T}) = 0$. Может случиться, что наш канонический тип $(g, \tilde{T})$ распадётся на конечное число подтипов с различными алгебрами $\mathfrak{h}_1$. Запишем тензор $\tilde{R}$ в виде

$$\tilde{R}(U_i, U_j)U_k = \sum_l r_{ijk}^l U_l,$$

где γ_{ijk}^l — комплексные переменные. Выразим сначала условие $\tilde{R}(U_i, U_j) \in \mathfrak{h}_1^c$ для всех U_i, U_j , а затем все необходимые условия, следующие из III.19 и III.35, т.е. из аксиом риманова инфинитезимального s -многообразия. Выразим также условие вещественности для $\tilde{R}$. В результате мы либо убедимся в невозможности удовлетворить всем условиям, либо получим, что $\tilde{R}$ всё ещё зависит от некоторого числа переменных. Если возможно, минимизируем число переменных изменением базиса $U_1, \dots, U_n$ (сохраняя при этом каноническую форму g и $\tilde{T}$). Снова, возможно, придётся различать несколько типов тензора $\tilde{R}$ с различными каноническими формами.

Имея данное инфинитезимальное риманово s -многообразие $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ с $\tilde{T} \neq 0$, мы хотим уметь определять, является ли соответствующее односвязное обобщённое симметрическое пространство (M, g) локально-симметрическим. Для этой цели вычисляем по g и $\tilde{T}$ тензор разности D при помощи формулы (14) из предложения III.41. Далее вычисляем тензор римановой кривизны на V по формуле

$$R(X, Y) = \tilde{R}(X, Y) + [D_X, D_Y] + D_{\tilde{T}(X, Y)} \quad \text{для } X, Y \in V,$$

которая является алгебраическим аналогом формулы (6) из леммы III.33. Условие $\nabla R \neq 0$ выполняется, если и только если $D_Z R \neq 0$ для некоторого $Z \in V$.

Остаётся по инфинитезимальному s -многообразию $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ построить пространство (M, g) и вспомогательную регулярную s -структуру $\{s_x\}$. В соответствии с теоремами I.17 и I.19 мы сначала строим алгебру Ли $\mathfrak{h}$, порождённую эндоморфизмами $\tilde{R}(X, Y)$, $X, Y \in V$, а затем алгебру Ли $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$, в которой

$$[X, Y] = -\tilde{T}(X, Y) - \tilde{R}(X, Y),$$

$$[A, X] = AX,$$

$$[A, B] = AB - BA$$

для $X, Y \in V$, $A, B \in \mathfrak{h}$.

Следующий шаг состоит в геометрической реализации однородного пространства G/H . К счастью, во многих случаях алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не имеет центра и можно использовать присоединённое представление. На практике мы часто пытаемся найти представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ инфинитезимальными аффинными преобразованиями декартова пространства $\mathbb{R}^k$. Отсюда мы получаем G и H как некоторые матричные группы. Тензор g порождает инвариантную метрику на G/H . Наконец,

регулярную s -структуру $\{s_x\}$ всегда можно представить некоторым автоморфизмом $\mathcal{G}$ группы G (см. теорему II.25).

Во многих случаях однородное пространство G/H имеет простую топологическую структуру (например, диффеоморфно $\mathbb{R}^n$, S^n , $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}$ и т.п.). Это всегда так, если $\tilde{K} = 0$ (см. гл. II). В этих случаях мы в состоянии представить все допустимые инвариантные метрики на нашем многообразии G/H в некоторой простой явной форме. Более того, мы можем задать "типичную" симметрию в начальной точке пространства $(G/H, g)$ в виде линейного преобразования.

В размерности $n = 2$ нет необходимости применять нашу процедуру. Имеет место следующий результат:

Теорема VI.1. Любое обобщённое симметрическое риманово пространство размерности $n = 2$ (односвязное или неодносвязное) является римановым симметрическим.

Доказательство. Пространство (M, g) однородно и постоянной кривизны. Следовательно, оно гомотетично одному из следующих пространств: евклидовой плоскости E^2 , цилиндру $S^1 \times E^1$, тору T^2 , сфере S^2 , проективной плоскости $P^2 = S^2 / \{\pm 1\}$ или гиперболической плоскости H^2 (см. [Bo]', гл. 2). $\square$

В последующих параграфах мы решим задачу классификации для размерностей 3, 4, 5. Полные доказательства будут даны только для $n = 3$ и 4; в случае размерности 5 мы ограничимся кратким наброском процедуры классификации. Подробности можно найти в [K3]. В заключительном параграфе мы совсем бегло коснёмся случая $n = 6$.

Для краткости обобщённые симметрические римановы пространства, не являющиеся римановыми симметрическими в классическом смысле, мы будем ниже называть собственными.

РАЗМЕРНОСТЬ 3

Теорема VI.2. Всякое собственное односвязное обобщённое симметрическое риманово пространство (M, g) размерности $n = 3$ имеет порядок $k = 4$. Оно неприводимо и описывается следующим образом. Низлежащим однородным пространством служит матричная группа

$$\left\{ \begin{vmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Пространство (M, g) есть $\mathbb{R}^3[x, y, z]$ с римановой метрикой

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + \lambda^2 dz^2,$$

где $\lambda > 0$ – константа. Типичная симметрия порядка 4 в начале $[0, 0, 0]$ – это преобразование $x' = -y$, $y' = x$, $z' = -z$.

Доказательство. Существенно различными элементами в $\mathcal{D}^{*3} = \mathcal{D}^3$ являются тройки $(-1, -1, -1)$ и $(\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, -1)$. Первый из них приводит к классическим симметрическим пространствам. Положим далее в этой главе $i = \sqrt{-1}$.

Пусть V – трёхмерное вещественное векторное пространство;
 $S : V \rightarrow V$ – линейное преобразование с собственными числами i , $-i$, -1 ; g – скалярное произведение в V , такое что $S(g) = g$,
а $\tilde{T} \neq 0$ – тензор типа $(1, 2)$ со свойствами $\tilde{T}(Y, X) = -\tilde{T}(X, Y)$,
 $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$. Будем обозначать теми же самыми символами линейные продолжения тензоров S , g и $\tilde{T}$ на комплексификацию $V^c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ пространства V :

Пусть $U \in V^c$ – комплексный собственный вектор преобразования V , такой что $SU = iU$, а $W \in V$ – вещественный собственный вектор, такой что $SW = -W$. Тогда $SU = -i\bar{U}$. Условие $S(g) = g$ означает, что $g(SZ, SZ') = g(Z, Z')$ для любых $Z, Z' \in V^c$, откуда

$$\begin{aligned} g(U, U) &= g(\bar{U}, \bar{U}) = g(W, U) = g(W, \bar{U}) = 0, \\ g(U, \bar{U}) &= a^2 > 0, \quad g(W, W) = b^2 > 0, \end{aligned}$$

где a, b – вещественные переменные. Свойство $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$ означает, что $\tilde{T}(SZ, SZ') = S(\tilde{T}(Z, Z'))$ для любых $Z, Z' \in V^c$. Отсюда следует, что

$$\tilde{T}(U, \bar{U}) = 0, \quad \tilde{T}(U, W) = \alpha \bar{U}, \quad \tilde{T}(\bar{U}, W) = \bar{\alpha} U,$$

где $\alpha \neq 0$ – комплексная переменная.

Допустим, что $\alpha = \rho e^{2i\varphi}$ с $\rho > 0$, и положим

$$U' = (1/\rho) e^{-i\varphi} U, \quad W' = (1/\rho) W.$$

Заменяя U на U' и W на W' , мы можем считать a^2 и α равными 1. Таким образом, для каждой тройки тензоров $(S, g, \tilde{T})$ на V с требуемыми свойствами существует базис $(U, \bar{U}, W)$ в V^c ($W \in V$), та-

кой что

$$\begin{aligned} SU &= iU, \quad S\bar{U} = -i\bar{U}, \quad SW = -W, \\ g(U, U) &= g(\bar{U}, \bar{U}) = g(W, U) = g(W, \bar{U}) = 0, \\ g(U, \bar{U}) &= 1, \quad g(W, W) = \lambda^2 > 0, \\ \tilde{T}(U, \bar{U}) &= 0, \quad \tilde{T}(U, W) = \bar{U}, \quad \tilde{T}(\bar{U}, W) = U. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы получили каноническую форму произвольной допустимой тройки $(S, g, \tilde{T})$, $\tilde{T} \neq 0$, и легко видеть, что $\lambda > 0$ — инвариант этой канонической формы. Это означает, что две тройки $(S_j, g_j, \tilde{T}_j)$, $j = 1, 2$, с различными λ не могут быть сведены одна к другой при помощи линейного преобразования $f: V \rightarrow V$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ обозначает алгебру Ли всех вещественных эндоморфизмов $A: V^c \rightarrow V^c$, которые как дифференцирования удовлетворяют условиям $A(S) = A(g) = A(\tilde{T}) = 0$. Равенство $A(S) = 0$ означает, что $A \cdot S = S \cdot A$, и, значит,

$$AU = uU, \quad A\bar{U} = \bar{u}\bar{U}, \quad AW = wW,$$

где w — вещественное число. Далее, равенство $A(g) = 0$ означает, что $g(AZ, Z') + g(Z, AZ') = 0$ для любых $Z, Z' \in V^c$, откуда $u + \bar{u} = 0$, $w = 0$. Наконец $A(\tilde{T}) = 0$ влечёт

$$A(\tilde{T}(U, W)) = \tilde{T}(AU, W) + \tilde{T}(U, AW),$$

откуда получаем $u = \bar{u}$. Следовательно, $u = w = 0$ и $\mathfrak{F} = (0)$.

Если $(V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ — инфинитезимальное s -многообразие, $\tilde{T} \neq 0$, то из условий

$$\tilde{K}(X, Y)(S) = \tilde{K}(X, Y)(g) = \tilde{K}(X, Y)(\tilde{T}) = 0$$

следует, что $\tilde{K}(X, Y) \in \mathfrak{F}$ для любых $X, Y \in V$, и, таким образом, $\tilde{K} = 0$. Обратно, каждый набор $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ с тензорами $S, g, \tilde{T}$, определёнными формулами (1), есть инфинитезимальное s -многообразие. Итак, все инфинитезимальные s -многообразия на V с $\tilde{T} \neq 0$ имеют вышеуказанный вид и зависят от одного вещественного параметра $\lambda > 0$.

Легко подсчитать, что $(D_U \tilde{K})(U, \bar{U}) \neq 0$ и, следовательно, соответствующие обобщённые симметрические римановы пространства (M, g) не являются локально-симметрическими, т.е. они собственные. Далее, они все неприводимы. Действительно, допустим, что одно из наших пространств (M, g) приводимо. Тогда в соответствии с теоремой де Рама о разложении мы имели бы $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$,

где (M_i, g_i) — обобщённые симметрические пространства размерности ≤ 2 , а стало быть и римановы симметрические, и (M, g) также было бы римановым симметрическим, что не так.

Построим алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\mathfrak{h} = (0)$, так как $\tilde{K} = 0$, а скобка Ли в $\mathfrak{g}$ задаётся формулой $[X_1, X_2] = -\tilde{T}(X_1, X_2)$ для любых $X_1, X_2 \in V$. Положим

$$U = (X + iY)/\sqrt{2}, \quad W = Z, \quad \text{где } X, Y, Z \in V.$$

Тогда

$$g(X, X) = g(Y, Y) = 1, \quad g(Z, Z) = \lambda^2$$

и X, Y, Z взаимно ортогональны. Преобразование S удовлетворяет условиям

$$SX = -Y, \quad SY = X, \quad SZ = -Z.$$

Далее, мы получаем таблицу умножения для $\mathfrak{g}$ в виде

$$[X, Y] = 0, \quad [X, Z] = X, \quad [Y, Z] = -Y.$$

Нетрудно найти представление алгебры $\mathfrak{g}$ инфинитезимальными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^2[x, y]$:

$$X = \partial/\partial x, \quad Y = \partial/\partial y, \quad Z = x(\partial/\partial x) - y(\partial/\partial y).$$

Отсюда мы получаем конечномерное представление, а именно группу "гиперболических" движений

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-c} & 0 & a \\ 0 & e^c & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Низлежащее многообразие группы G есть декартово пространство $\mathbb{R}^3[a, b, c]$. Элементы $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ могут быть представлены левоинвариантными векторными полями на G

$$e^{-c}(\partial/\partial a), \quad e^c(\partial/\partial b), \quad \partial/\partial c$$

соответственно. Скалярное произведение g на $V = \mathfrak{g}$ индуцирует следующую инвариантную риманову метрику на $\mathbb{R}^3[a, b, c]$:

$$ds^2 = e^{2c} da^2 + e^{-2c} db^2 + \lambda^2 dc^2, \quad \lambda > 0. \quad {}^{33)}$$

Наконец, симметрия S_0 порядка 4 в начале $[0, 0, 0] \in \mathbb{R}^3$ задаётся так: $a' = -b, \quad b' = a, \quad c' = -c$. (См. также гл. 0.) $\square$

РАЗМЕРНОСТЬ 4

Теорема VI.3. Всякое собственное односвязное неприводимое обобщённое симметрическое риманово пространство (M, g) размерности $n = 4$ имеет порядок $k = 3$ и описывается следующим образом. Низлежащим однородным пространством служит

$$\left\{ \begin{vmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} / \left\{ \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}, \text{ где } \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Пространство (M, g) есть $\mathbb{R}^4[x, y, u, v]$ с римановой метрикой

$$ds^2 = (-x + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}) du^2 + (x + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}) dv^2 - 2y du dv + \lambda^2 \left[\frac{(1 + y^2) dx^2 + (1 + x^2) dy^2 - 2xy dx dy}{1 + x^2 + y^2} \right] \quad (\lambda > 0).$$

Типичная симметрия порядка 3 в начале $[0, 0, 0, 0]$ — это преобразование

$$\begin{aligned} u' &= \cos \frac{2\pi}{3} \cdot u - \sin \frac{2\pi}{3} \cdot v, & v' &= \sin \frac{4\pi}{3} \cdot u + \cos \frac{4\pi}{3} \cdot v, \\ x' &= \cos \frac{2\pi}{3} \cdot x - \sin \frac{2\pi}{3} \cdot y, & y' &= \sin \frac{4\pi}{3} \cdot x + \cos \frac{4\pi}{3} \cdot y. \end{aligned}$$

Доказательство. Прежде всего, справедливо следующее утверждение, доказать которое предоставляется читателю в качестве упражнения:

Предложение VI.4. Существенно различные элементы множества $\mathcal{D}^{*4} = \mathcal{D}^4$ таковы:

- (a) $(\theta, \theta, \theta^2, \theta^2), \quad \theta = e^{2\pi i/3};$
- (b) $(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4), \quad \theta = e^{2\pi i/5};$
- (c) $(i, -i, -1, -1);$
- (d) $(-1, -1, -1, -1).$

Рассмотрим каждую из этих систем собственных чисел отдельно.

(а) Система собственных чисел $(\theta, \theta, \bar{\theta} = \theta^2, \bar{\theta} = \theta^2), \quad \theta = e^{2\pi i/3}$. Пусть V — четырёхмерное векторное пространство, V^c — его комплексификация, а $S: V^c \rightarrow V^c$ — вещественное линейное преобразование с указанной системой собственных чисел. Далее, пусть $g, \tilde{T}$ — тензоры пространства V , удовлетворяющие обычным условиям; обозначим их линейные продолжения на V^c теми же буквами. Можно найти

базис $(U_1, U_2, \bar{U}_1, \bar{U}_2)$ пространства V^c , состоящий из собственных векторов преобразования S , таких что

$$SU_1 = \theta U_1, \quad SU_2 = \theta U_2, \quad S\bar{U}_1 = \bar{\theta} \bar{U}_1, \quad S\bar{U}_2 = \bar{\theta} \bar{U}_2,$$

$$g(U_1, \bar{U}_1) = g(U_2, \bar{U}_2) = 1, \quad g(U_1, \bar{U}_2) = 0.$$

Далее, поскольку $S(g) = g$, то $g(U_j, U_k) = g(\bar{U}_j, \bar{U}_k) = 0$. Для тензора $\tilde{T}$ мы имеем

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = \alpha \bar{U}_1 + \beta \bar{U}_2, \quad \tilde{T}(\bar{U}_1, \bar{U}_2) = \bar{\alpha} U_1 + \bar{\beta} U_2, \quad \tilde{T}(U_j, \bar{U}_k) = 0,$$

в силу равенства $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$. Здесь α и β — комплексные переменные.

Если $\tilde{T} \neq 0$, то $\rho^2 = \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta} > 0$. Заменяем U_1, U_2 новыми собственными векторами

$$U'_1 = (\bar{\alpha} U_1 + \bar{\beta} U_2) / \rho, \quad U'_2 = (-\beta U_1 + \alpha U_2) / \rho^2,$$

после чего будем опять писать U_1 и U_2 вместо U'_1 и U'_2 . В результате получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} SU_1 &= \theta U_1, \quad SU_2 = \theta U_2, \quad S\bar{U}_1 = \bar{\theta} \bar{U}_1, \quad S\bar{U}_2 = \bar{\theta} \bar{U}_2, \\ g(U_1, \bar{U}_1) &= 1, \quad g(U_2, \bar{U}_2) = 1/\rho^2, \\ g(U_1, \bar{U}_2) &= g(\bar{U}_1, U_2) = 0, \quad g(U_j, U_k) = 0, \\ \tilde{T}(U_1, U_2) &= \bar{U}_1, \quad \tilde{T}(\bar{U}_1, \bar{U}_2) = U_1, \quad \tilde{T}(U_j, \bar{U}_k) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы нашли каноническую форму тройки тензоров $(g, S, \tilde{T})$, $\tilde{T} \neq 0$; эти тройки зависят от вещественного инварианта ρ .

Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли всех вещественных эндоморфизмов A пространства V^c , которые как дифференцирования аннулируют S , g и $\tilde{T}$.

Равенство $A(S) = 0$ означает, что

$$AU_j = \sum a_j^k U_k, \quad A\bar{U}_j = \sum \bar{a}_j^k U_k \quad (j, k = 1, 2).$$

Равенство $A(g) = 0$ означает, что

$$a_1^1 + \bar{a}_1^1 = 0, \quad a_2^2 + \bar{a}_2^2 = 0, \quad a_1^2 + \rho^2 \bar{a}_2^1 = 0.$$

Из равенства $A(\tilde{T}) = 0$ вытекает, в частности, что

$$A(\tilde{T}(U_1, U_2)) = \tilde{T}(AU_1, U_2) + \tilde{T}(U_1, AU_2),$$

откуда $\alpha_1^1 + \alpha_2^2 = \bar{\alpha}_1^1$, $\bar{\alpha}_1^2 = 0$. Получаем

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^1 = 0, \alpha_2^2 = -2\alpha_1^1, \alpha_j^j + \bar{\alpha}_j^j = 0.$$

Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{K}$ одномерна и порождается эндоморфизмом B , задаваемым формулами

$$BU_1 = iU_1, BU_2 = -2iU_2, B\bar{U}_1 = -i\bar{U}_1, B\bar{U}_2 = 2i\bar{U}_2. \quad (3)$$

Пусть $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — любое инфинитезимальное s -многообразие с тензорами $g, S, \tilde{T}$, удовлетворяющими условиям (2). Для любых $X, Y \in V$ имеем $\tilde{R}(X, Y) \in \mathfrak{K}$; отсюда следует, что $\tilde{R}(Z, Z') \in \mathfrak{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ для всех $Z, Z' \in V^{\mathbb{C}}$. В $V^{\mathbb{C}}$ должно выполняться первое тождество Бьянки

$$\sigma(\tilde{R}(Z, Z')Z'') = \sigma(\tilde{T}(\tilde{T}(Z, Z'), Z'')).$$

В частности, мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R}(U_1, U_2)\bar{U}_1 + \tilde{R}(U_2, \bar{U}_1)U_1 + \tilde{R}(\bar{U}_1, U_1)U_2 &= 0, \\ \tilde{R}(U_1, U_2)\bar{U}_2 + \tilde{R}(U_2, \bar{U}_2)U_1 + \tilde{R}(\bar{U}_2, U_1)U_2 &= U_1, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{R}(U_1, U_2) = \tilde{R}(\bar{U}_1, \bar{U}_2) = \tilde{R}(U_1, U_2) = \tilde{R}(U_1, \bar{U}_2) = \tilde{R}(U_1, \bar{U}_1) &= 0, \\ \tilde{R}(U_2, \bar{U}_2) &= -iB. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко проверить, что $B(\tilde{R}) = 0$ и, в частности, $\tilde{R}(Z, Z')(\tilde{R}) = 0$ для любых $Z, Z' \in V^{\mathbb{C}}$. Второе тождество Бьянки

$$\sigma(\tilde{R}(T(Z, Z'), Z'')) = 0$$

также справедливо. Следовательно, набор $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$, заданный соотношениями (2) и (4), есть инфинитезимальное s -многообразие для каждого $\rho > 0$. В то же время мы видим, что алгебра Ли $\mathfrak{H}$, порождённая эндоморфизмами $\tilde{R}(X, Y)$, совпадает с $\mathfrak{K}$.

Вычисляя D и R , без труда проверяем, что $(D_{U_1}R)(U_1, U_2)\bar{U}_1 \neq 0$, так что соответствующие обобщённые симметрические римановы пространства не будут локально-симметрическими. Таким образом, они собственные и имеют порядок 3.

Определим ортогональный базис (X_1, Y_1, X_2, Y_2) пространства V формулами

$$U_1 = (X_1 + iY_1)/\sqrt{2}, \quad U_2 = (X_2 + iY_2)/2.$$

Тогда

$$g(X_1, X_1) = g(Y_1, Y_1) = 1, \quad g(X_2, X_2) = g(Y_2, Y_2) = 2/\rho^2. \quad (5)$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = V \dot{+} \mathfrak{h}$ подчиняется правилам коммутирования

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -\tilde{T}(X, Y) - \tilde{R}(X, Y) \quad \text{для } X, Y \in V, \\ [X, A] &= -AX \quad \text{для } X \in V, A \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

По отношению к базису $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, B\}$ мы без труда получаем следующую таблицу умножения:

$$\begin{aligned} [X_1, Y_1] &= 0, \quad [X_1, X_2] = -X_1, \quad [X_1, Y_2] = Y_1, \\ [Y_1, Y_2] &= Y_1, \quad [Y_1, X_2] = X_1, \quad [X_2, Y_2] = -2B, \\ [X_1, B] &= Y_1, \quad [Y_1, B] = -X_1, \quad [X_2, B] = -2Y_2, \quad [Y_2, B] = 2X_2. \end{aligned}$$

Попытаемся представить векторы из $\mathfrak{g}$ инфинитезимальными аффинными преобразованиями плоскости $\mathbb{R}^2[x, y]$. Полагая $X_1 = \partial/\partial x$, $Y_1 = \partial/\partial y$, легко вычисляем, что

$$X_2 = y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_2 = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}, \quad B = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Соответствующая группа Ли есть группа (положительных) эквивариантных преобразований плоскости, или, эквивалентно, группа G всех матриц вида

$$\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

удовлетворяющих соотношению $ad - bc = 1$. Наш базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представляется следующими левоинвариантными векторными полями на G :

$$\begin{aligned} X_1 &= a \frac{\partial}{\partial \alpha} + c \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad Y_1 = b \frac{\partial}{\partial \alpha} + d \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad X_2 = a \frac{\partial}{\partial a} - b \frac{\partial}{\partial b} + c \frac{\partial}{\partial c} - d \frac{\partial}{\partial d}, \\ Y_2 &= -(a \frac{\partial}{\partial b} + b \frac{\partial}{\partial a} + c \frac{\partial}{\partial d} + d \frac{\partial}{\partial c}), \quad B = a \frac{\partial}{\partial b} - b \frac{\partial}{\partial a} + c \frac{\partial}{\partial d} - d \frac{\partial}{\partial c}. \end{aligned}$$

Подгруппа H группы G , порождённая инфинитезимальным преобразованием B , есть группа всех матриц вида

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим отображение π группы G в декартово пространство $\mathbb{R}^4$ $[u, v, x, y]$, задаваемое формулами

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad x = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)/2, \quad y = ac + bd.$$

Легко видеть, что отображение π есть проекция главного расслоения с базой $\mathbb{R}^4$ и структурной группой H . В частности, однородное пространство G/H диффеоморфно $\mathbb{R}^4$. Для любого $m \in G$ проекции касательных векторов X_1, Y_1, X_2, Y_2 на $G/H = \mathbb{R}^4$ суть касательные векторы

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= a \frac{\partial}{\partial u} + c \frac{\partial}{\partial v}, \quad \tilde{Y}_1 = b \frac{\partial}{\partial u} + d \frac{\partial}{\partial v}, \\ \tilde{X}_2 &= (a^2 + d^2 - b^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2(ac - bd) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \tilde{Y}_2 &= 2(cd - ab) \frac{\partial}{\partial x} - 2(ad + bc) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

в точке $\pi(m)$. Эти касательные векторы меняются при изменении m .

С другой стороны, соответствующая метрика g на G/H будет G -инвариантна. Это означает, что величины $g(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$, $g(\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_j)$, $g(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j)$ не зависят от выбора $m \in G$; а именно, мы имеем

$$\begin{aligned} g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1) &= g(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_1) = 1, \quad g(\tilde{X}_2, \tilde{X}_2) = g(\tilde{Y}_2, \tilde{Y}_2) = 2/\rho^2, \\ g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) &= g(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = g(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_2) = g(\tilde{X}_2, \tilde{Y}_1) = 0 \end{aligned}$$

(см. формулу (5)). Выражая $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ через $\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1$, а $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ — через $\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2$, мы получаем несложной выкладкой ту самую инвариантную метрику, какая указана в формулировке нашей теоремы.

Действие группы G на $\mathbb{R}^4[u, v, x, y]$ индуцируется левыми сдвигами группы G , действующими на G . Следовательно, подгруппа H действует на $\mathbb{R}^4$ как группа изометрий по правилу

$$u' = (\cos \varphi)u - (\sin \varphi)v, \quad v' = (\sin \varphi)u + (\cos \varphi)v,$$

$$x' = (\cos 2\varphi)x - (\sin 2\varphi)y, \quad y' = (\sin 2\varphi)x + (\cos 2\varphi)y.$$

Далее, H есть подгруппа изотропии группы G в начале i , согласно лемме 0.14, все преобразования $\Phi \in H$ с $\varphi \neq n\pi$ будут симметриями в начале, и они определяют регулярные s -структуры на $(\mathbb{R}^4, g)$. В частности, наше пространство является k -симметрическим для любого $k \geq 3$, откуда следует последнее утверждение теоремы.

Нам осталось только проверить, что наши римановы пространства неприводимы. Пусть (M, g) — односвязное пространство из нашего семейства. Предположим, что $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$. Здесь M_1, M_2 не могут быть размерности 2, иначе они были бы локально-симметричны и (M, g) также было бы локально-симметрическим. Допустим, что $\dim M_1 = 3, \dim M_2 = 1$, причём пространство M_1 — собственное. Тогда (M_1, g_1) есть одно из пространств, описанных в теореме VI.2. Как нам известно из гл. 0, (M_1, g_1) не имеет инфинитезимальных вращений; значит, $\dim I^*(M_1, g_1) = 3$. Далее, (M_2, g_2) изометрично евклидовой прямой и потому $\dim I^*(M_2, g_2) = 1$. Как хорошо известно, $I^*(M) = I^*(M_1) \times I^*(M_2)$ (см., например, $[KH2]'$); отсюда следует, что $\dim I^*(M, g) = 4$, а это невозможно, так как $I^*(M, g) \supset G$.

(b) Система собственных чисел $(\theta, \bar{\theta} = \theta^4, \tau = \theta^3, \bar{\tau} = \theta^2)$, $\theta = e^{2\pi i/5}$. Пусть $(V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T}), \tilde{T} \neq 0$, — инфинитезимальное s -многообразие с указанной системой собственных чисел и U_1, U_2 — комплексные единичные собственные векторы, отвечающие θ и τ соответственно. Тогда

$$SU_1 = \theta U_1, \quad SU_2 = \theta^3 U_2, \quad S\bar{U}_1 = \theta^4 \bar{U}_1, \quad S\bar{U}_2 = \theta^2 \bar{U}_2,$$

$$g(U_1, \bar{U}_1) = g(U_2, \bar{U}_2) = 1, \quad g(U_1, U_2) = g(U_1, \bar{U}_2) = 0.$$

Из равенства $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$ следует, что

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = \alpha \bar{U}_1, \quad \tilde{T}(U_1, \bar{U}_2) = \beta U_2$$

$$\tilde{T}(\bar{U}_1, \bar{U}_2) = \bar{\alpha} U_1, \quad \tilde{T}(\bar{U}_1, U_2) = \bar{\beta} U_2,$$

где α, β — комплексные числа, не равные нулю одновременно.

Если $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, то мы можем привести пару $(g, \tilde{T})$ к канонической форме (2), а также получить (3) и (4). В результате мы приходим к тем же пространствам, что и в пункте (а), но только наделённым симметриями порядка 5. Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$, то, введя новый базис $\{U'_1, U'_2\} = \{U_2, U_1\}$, мы получаем новые параметры

$\alpha' = -\bar{\beta}$, $\beta' = -\alpha$, и всё сводится к первому случаю.

Предположим теперь, что $\alpha\beta \neq 0$, и найдем алгебру Ли $\mathfrak{L}$ всех вещественных эндоморфизмов A пространства V^c , таких что $A(q) = 0$, $A(S) = 0$, $A(\tilde{T}) = 0$.

Равенство $A(S) = 0$ означает, что

$$AU_1 = \lambda U_1, A\bar{U}_1 = \bar{\lambda}\bar{U}_1, AU_2 = \mu U_2, A\bar{U}_2 = \bar{\mu}\bar{U}_2.$$

Из равенства $A(q) = 0$ следует, что

$$\lambda + \bar{\lambda} = 0, \mu + \bar{\mu} = 0.$$

Из равенства $A(\tilde{T}) = 0$ следует, что

$$\alpha(\bar{\lambda} - \lambda - \mu) = 0, \beta(\mu - \lambda - \bar{\mu}) = 0.$$

Таким образом, $\lambda = \mu = 0$ и $\mathfrak{L} = (0)$. Это означает, что $\tilde{K} = 0$, и первое тождество Бьянки принимает вид

$$\sigma(\tilde{T}(\tilde{T}(Z, Z'), Z'') = 0.$$

С другой стороны,

$$\sigma(\tilde{T}(\tilde{T}(U_1, U_2), \bar{U}_1) = \beta\bar{\beta}U_2, \sigma(\tilde{T}(\tilde{T}(U_1, U_2), \bar{U}_2) = \alpha\bar{\alpha}U_1,$$

откуда $\alpha = \beta = 0$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, новых инфинитезимальных s -многообразий в рассматриваемом случае не получается.

(с) Система собственных чисел $(i, -i, -1, -1)$. Пусть $(V, q, S, \tilde{K}, \tilde{T})$, $\tilde{T} \neq 0$, — инфинитезимальное многообразие с указанными выше собственными числами. Выберем комплексные собственные векторы $U, \bar{U} \in V^c$, соответствующие собственным числам $i, -i$, так что $q(U, \bar{U}) = 1$. Пусть H — (вещественное) собственное пространство в V , отвечающее числу -1 , и $V_1, V_2 \in H$ таковы, что

$$q(V_1, V_1) = q(V_2, V_2) = 1, q(V_1, V_2) = 0.$$

Из соотношения $S(T(Z, Z')) = \tilde{T}(SZ, SZ')$ следует, что

$$\tilde{T}(U, \bar{U}) = 0, \tilde{T}(V_1, V_1) = 0, \tilde{T}(U, V_1) = \alpha\bar{U}, \tilde{T}(U, V_2) = \beta\bar{U}.$$

Здесь α, β — комплексные числа, не равные нулю одновременно.

Вычисляя теперь алгебру Ли $\mathfrak{L}$, задаваемую соотношениями $A(S) = 0$, $A(\tilde{T}) = 0$, $A(q) = 0$, приходим к следующему заключению: если $\beta \pm i\alpha \neq 0$, то наше инфинитезимальное многооб-

разие приводимо и $\tilde{K} = 0$. Если же $\beta = \pm i\alpha$, то получается то же обобщённое симметрическое пространство, что и в случае (а).

(d) Система собственных чисел $(-1, -1, -1, -1)$. Эта система приводит только к римановым симметрическим пространствам, и потому мы её не будем рассматривать. $\square$

РАЗМЕРНОСТЬ 5

Теорема VI.5. Все собственные односвязные неприводимые обобщённые симметрические римановы пространства (M, g) размерности $n = 5$ имеют порядок $k = 4$ или 6 и принадлежат одному из указанных ниже 12 типов.

Тип 1. Низлежащим однородным пространством служит группа матриц вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ u & v & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пространство (M, g) есть $R^5(x, y, z, u, v)$ с римановой метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2 + \lambda^2(xdu - ydv + dz)^2 \quad (\lambda > 0).$$

Типичная симметрия в точке $(0, \dots, 0)$ — это преобразование

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -z, \quad u' = -v, \quad v' = u.$$

Тип 2. Низлежащим однородным пространством служит группа матриц

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_2 t} & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

зависящая от двух вещественных параметров $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0$.

Пространство (M, g) есть $\mathbb{R}^5(x, y, z, w, t)$ с римановой метрикой

$$ds^2 = e^{-2\lambda_1 t} dx^2 + e^{2\lambda_1 t} dy^2 + e^{-2\lambda_2 t} dz^2 + e^{2\lambda_2 t} dw^2 + dt^2 \\ + 2\alpha [e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dx dz + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} dy dw] \\ + 2\beta [e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dy dz - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dx dw].$$

Здесь или $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$,
или $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\alpha = 0$, $0 \leq \beta < 1$,
или $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha = 0$, $0 < \beta < 1$.

Типичная симметрия в точке $(0, \dots, 0)$ — это преобразование

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -w, \quad w' = z, \quad t' = -t.$$

Тип 3. Низлежащим однородным пространством M служит $SO(3, \mathbb{C})/SO(2)$, где $SO(3, \mathbb{C})$ обозначает специальную комплексную ортогональную группу, а $SO(2)$ — её подгруппу, состоящую из матриц вида

$$\left\| \begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \text{где } F \cdot F' = I, \det F = 1.$$

Риманова метрика g в M индуцируется следующей вещественной инвариантной положительно-полуопределённой формой на группе $GL(3, \mathbb{C})$ всех регулярных (невырожденных) комплексных матриц вида

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right\| :$$

$$\tilde{g} = \lambda^2 (\omega_1 \bar{\omega}_1 + \omega_2 \bar{\omega}_2) + \mu^2 ((\omega_1)^2 + (\bar{\omega}_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\bar{\omega}_2)^2 + \mu^2 \left(\frac{\omega_3 - \bar{\omega}_3}{i} \right)^2),$$

где

$$\omega_1 = a_2 da_3 + b_2 db_3 + c_2 dc_3, \\ \omega_2 = a_3 da_1 + b_3 db_1 + c_3 dc_1, \\ \omega_3 = a_1 da_2 + b_1 db_2 + c_1 dc_2,$$

а λ, δ, μ — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям

$$\lambda > 0, \mu > 0, \quad |2\delta| < \lambda^2.$$

Типичная симметрия в начале пространства M индуцируется следующим преобразованием из $GL(3, \mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{b}_2 & -\bar{b}_1 & \bar{b}_3 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 & -\bar{a}_3 \\ \bar{c}_2 & -\bar{c}_1 & \bar{c}_3 \end{pmatrix}.$$

Тип 4. Низлежащим однородным пространством служит комплексная матричная группа

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & z \\ 0 & e^{-\lambda t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

зависящая от комплексного параметра λ . Здесь z, w обозначают комплексные переменные, а t — вещественную переменную.

Пространство (M, g) есть $\mathbb{C}^2(z, w) \times \mathbb{R}^1(t)$ с (вещественной) римановой метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = & e^{-(\lambda + \bar{\lambda})t} dz d\bar{z} + e^{(\lambda + \bar{\lambda})t} dw d\bar{w} + (dt)^2 \\ & + 2[e^{(\bar{\lambda} - \lambda)t} dz d\bar{w} + e^{(\lambda - \bar{\lambda})t} d\bar{z} dw] + \alpha e^{-2\lambda t} (dz)^2 \\ & + \bar{\alpha} e^{-2\bar{\lambda}t} (d\bar{z})^2 - \alpha e^{2\lambda t} (dw)^2 + \bar{\alpha} e^{2\bar{\lambda}t} (d\bar{w})^2. \end{aligned}$$

Здесь α — ещё один комплексный параметр, а $\mu \geq 0$ — вещественный параметр, причём $\alpha \bar{\alpha} + \mu^2 < \frac{1}{4}$, и если $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, то $\alpha = 0$, а $\mu \neq 0$.

Типичная симметрия в точке $(0, 0, 0)$ — это преобразование

$$z' = iw, \quad w' = iz, \quad t' = -t.$$

Типы 5a, 5b. Низлежащим однородным пространством M служит либо $(SO(3) \times SO(3))/SO(2)$, либо $(SO(1, 2) \times SO(1, 2))/SO(2)$, где $SO(2)$ обозначает подгруппу, состоящую из всех матричных пар вида

$$\left(\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \right).$$

Риманова метрика g индуцируется следующей вещественной инвариантной положительно-полуопределённой формой на группе $GL(3, \mathbb{R}) \times GL(3, \mathbb{R})$ всех регулярных матричных пар вида

$$\left(\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{array} \right\| \end{array} \right);$$

$$\tilde{g} = \alpha^2 [(\omega_1 + \tilde{\omega}_2)^2 + (\tilde{\omega}_1 + \omega_2)^2] + \beta^2 [(\omega_1 - \tilde{\omega}_2)^2 + (\tilde{\omega}_1 - \omega_2)^2] + \gamma^2 (\omega_3 + \tilde{\omega}_3)^2,$$

где

$$\omega_1 = a_2 da_3 + b_2 db_3 \pm c_2 dc_3,$$

$$\omega_2 = a_3 da_1 + b_3 db_1 \pm c_3 dc_1,$$

$$\omega_3 = a_1 da_2 + b_1 db_2 \pm c_1 dc_2,$$

а $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ аналогично выражаются через $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, d\tilde{a}_i, d\tilde{b}_i, d\tilde{c}_i$. Здесь α, β, μ — положительные вещественные параметры, а знаки „+” и „-” в выражениях для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ отвечают эллиптическому случаю (тип 5a) и гиперболическому случаю (тип 5b) соответственно.

Типичная симметрия в начале пространства M индуцируется следующим преобразованием группы $GL(3, \mathbb{R}) \times GL(3, \mathbb{R})$:

$$\left(\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{array} \right\| \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_3 \\ -\tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ -\tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{array} \right\| \end{array} \right).$$

Типы 6a, 6b. Низлежащим однородным пространством служит либо $SU(3)/SU(2)$, либо $SU(2, 1)/SU(2)$.

Пространство M есть подмногообразие в $\mathbb{C}^3(z^1, z^2, z^3)$, задаваемое соотношением $z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 \pm z^3 \bar{z}^3 = \pm 1$. Риманова метрика на M индуцируется следующей эрмитовой метрикой на $\mathbb{C}^3$:

$$\tilde{g} = \lambda (dz^1 d\bar{z}^1 + dz^2 d\bar{z}^2 \pm dz^3 d\bar{z}^3) + \mu (z^1 d\bar{z}^1 + z^2 d\bar{z}^2 \pm z^3 d\bar{z}^3)(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2 \pm \bar{z}^3 dz^3),$$

где λ, μ — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$ и $\mu \pm \lambda > 0$. Знаки „+” и „-” отвечают эллиптическому случаю (тип 6a) и гиперболическому случаю (тип 6b) соответственно.

Типичная симметрия в точке $(0, 0, 1) \in M$ индуцируется следующим преобразованием пространства $\mathbb{C}^3$:

$$z^{1'} = \bar{z}^2, \quad z^{2'} = -\bar{z}^1, \quad z^{3'} = \bar{z}^3.$$

Тип 7. Низлежащим однородным пространством служит группа всех вещественных матриц вида

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda t} & 0 & 0 & y \\ te^{\lambda t} & 0 & e^{\lambda t} & 0 & u \\ 0 & -te^{-\lambda t} & 0 & e^{-\lambda t} & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(t, x, y, u, v — вещественные переменные, λ — вещественный параметр).

Пространство (M, g) есть $\mathbb{R}^5(x, y, u, v, t)$ с римановой метрикой

$$g = (dt)^2 + e^{-2\lambda t} (tdx - du)^2 + e^{2\lambda t} (tdy + dv)^2 + \mu (e^{-2\lambda t} dx^2 + e^{2\lambda t} dy^2) + 2\gamma (dy du - dx dv),$$

где λ, μ, γ — вещественные параметры, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, $\gamma^2 < \mu$.

Типичная симметрия в точке $(0, \dots, 0)$ — это преобразование

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad u' = -v, \quad v' = u, \quad t' = -t.$$

Типы 8a, 8b. Низлежащим однородным пространством служит либо $I^e(\mathbb{R}^3) / SO(2)$, либо $I^h(\mathbb{R}^3) / SO(2)$, где $I^e(\mathbb{R}^3)$ (соотв. $I^h(\mathbb{R}^3)$) обозначает группу всех положительных (т.е. с положительным определителем) аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, сохраняющих дифференциальную форму $dx^2 + dy^2 + dz^2$ (соотв. $dx^2 + dy^2 - dz^2$). (Группа $I^e(\mathbb{R}^3)$ есть полупрямое произведение $SO(3)$ и $t(3)$, а $I^h(\mathbb{R}^3)$ — полупрямое произведение $SO(2, 1)$ и $t(3)$, где $t(3)$ обозначает группу сдвигов пространства $\mathbb{R}^3$.)

M есть подмногообразие в $\mathbb{R}^6(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)$, задаваемое соотношением $\alpha^2 + \beta^2 \pm \gamma^2 = \pm 1$. Риманова метрика на M индуцируется следующей регулярной (невыврожденной) инвариантной квадратичной формой на $\mathbb{R}^6$:

$$g = dx^2 + dy^2 \pm dz^2 + \lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2 \pm d\gamma^2) + [\mu^2 \pm (-1)] (\alpha dx + \beta dy \pm \gamma dz)^2,$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — вещественные параметры. Знаки „+“ и „-“ отвечают эллиптическому случаю (тип 8a) и гиперболическому случаю (тип 8b) соответственно.

Типичная симметрия в точке $(0, 0, 0; 0, 0, 1) \in M$ индуцируется следующим преобразованием пространства $\mathbb{R}^6$:

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -z, \quad \alpha' = \beta, \quad \beta' = -\alpha, \quad \gamma' = \gamma.$$

Тип 9 (пространства порядка 6). Низлежащим однородным пространством служит группа матриц вида

$$\begin{vmatrix} e^{-(u+v)} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^u & 0 & y \\ 0 & 0 & e^v & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пространство (M, g) есть $\mathbb{R}^5(x, y, z, u, v)$ с римановой метрикой

$$\begin{aligned}
g = a^2 (du^2 + dv^2 + dudv) \\
+ (b^2 + 1)(e^{2(u+v)}dx^2 + e^{-2u}dy^2 + e^{-2v}dz^2) \\
+ (b^2 - 2)(e^v dx dy + e^u dx dz - e^{-(u+v)} dy dz),
\end{aligned}$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Типичная симметрия в точке $(0, \dots, 0)$ — это преобразование

$$x' = y, y' = -z, z' = x, u' = v, v' = -(u + v).$$

Набросок доказательства теоремы VI.5. Прежде всего, справедливо следующее утверждение, доказать которое предоставляется читателю:

Предложение VI.6. Существенно различные элементы множества $\mathcal{D}^{*5}$ таковы:

- (a) $(i, -i, i, -i, -1)$;
- (b) $(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5)$, $\theta = e^{2\pi i/6}$;
- (c) $(e^{\pi i/4}, e^{-\pi i/4}, i, -i, -1)$;
- (d) $(i, -i, -1, -1, -1)$;
- (e) $(-1, -1, -1, -1, -1)$.

Система собственных чисел (e) приводит лишь к симметрическим римановым пространствам. Что касается случая (d), то здесь получаются только приводимые инфинитезимальные s -многообразия. (Подробности оставляем читателю.)

Рассмотрим случай (c). Пусть V — пятимерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $S: V^c \rightarrow V^c$ — вещественное преобразование с собственными числами $e^{\pi i/4}, e^{-\pi i/4}, i, -i, -1$. Пусть, далее, $U_1, \bar{U}_1, U_2, \bar{U}_2, W$ — соответствующие собственные векторы (вектор $W \in V$ — вещественный). Для каждого кососимметрического тензора $\tilde{T} \neq 0$ типа (1, 2), такого что $\tilde{T}(SZ, SZ') = S(\tilde{T}(Z, Z'))$, мы можем положить

$$\tilde{T}(U_2, W) = \alpha \bar{U}_2, \quad \tilde{T}(U_1, \bar{U}_2) = \beta \bar{U}_1, \quad \tilde{T}(\bar{U}_2, W) = \bar{\alpha} U_2, \quad \tilde{T}(\bar{U}_1, U_2) = \bar{\beta} U_1,$$

где α, β — комплексные числа (не равные одновременно нулю), и $\tilde{T}(Z, Z') = 0$ для всех прочих комбинаций собственных векторов Z, Z' . Допустим, что $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ — инфинитезимальное s -многообразие с S и $\tilde{T}$ такими, как указано выше. Заметим, что

$$g(U_1, \bar{U}_1) > 0, \quad g(U_2, \bar{U}_2) > 0, \quad g(W, W) > 0.$$

Предположив, что $\alpha\beta \neq 0$, мы легко показываем, что алгебра Ли $\mathfrak{L}$ — нулевая, так что $\tilde{K} = 0$. Из первого тождества Бьянки $\tilde{T}(\tilde{T}(U_2, W), U_1) = 0$ вытекает, что $\alpha\beta \bar{U}_1 = 0$, откуда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. В первом случае мы можем заменить S преобразованием S' с собственными числами (а), во втором — преобразованием S'' с собственными числами (б). Итак, можно ограничиться изучением случаев (а) и (б).

Классификация в случае (а) основана на следующем результате:

Предложение VI.7. Пусть $(V, g, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ — пятимерное инфинитезимальное s -многообразие с системой собственных чисел $(i, -i, i, -i, -1)$. Обозначим через $V^{(i)}, V^{(-i)}, V^{(-1)}$ соответствующие собственные подпространства преобразования S пространства V^c , так что $V^c = V^{(i)} \dot{+} V^{(-i)} \dot{+} V^{(-1)}$. Тогда для любого базиса $\{U_1, U_2\}$ в $V^{(i)}$ и любого $W \in V^{(-1)} \cap V$ тензор $\tilde{T}$ удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = \mu W, \quad \tilde{T}(U_i, \bar{U}_j) = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Далее, частичное отображение $\tilde{T} : V^{(i)} \times V^{(-1)} \rightarrow V^{(-i)}$ приводится после подходящего выбора $U_1, U_2 \in V^{(i)}, W \in V^{(-1)} \cap V$ к одной и только одной из следующих канонических форм:

- 1) $\tilde{T}(U_i, W) = 0, \quad i = 1, 2$;
- 2) $\tilde{T}(U_1, W) = \lambda_1 \bar{U}_1, \quad \tilde{T}(U_2, W) = \lambda_2 \bar{U}_2, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \geq \lambda_2$;
- 3) $\tilde{T}(U_1, W) = \lambda \bar{U}_2, \quad \tilde{T}(U_2, W) = \bar{\lambda} \bar{U}_1, \quad \lambda$ — комплексное число с ненулевой мнимой частью;
- 4) $\tilde{T}(U_1, W) = \lambda \bar{U}_1 + \bar{U}_2, \quad \tilde{T}(U_2, W) = \lambda \bar{U}_2, \quad \lambda \geq 0$.

В случае 1) мы получаем тип 1 из нашего классифицированного списка.

В случае 2) получаем типы 2 и 3.

В случае 3) — типы 4, 5а, 5b, 6а, 6b.

Наконец, в случае 4) мы получаем типы 7, 8а и 8b.

Соответствующие вычисления довольно длинны и не всегда сводятся к рутинным приёмам. Все подробности читатель может найти в [КЗ].

Классификация в случае (б) (система собственных чисел порядка 6) даёт оставшийся тип 9.

Замечание VI.8. Весьма громоздкими выкладками можно показать, что параметры каждого из полученных семейств являются "инфинитезимальными" инвариантами. С другой стороны, нетрудно проверить, что пространства различных типов попарно не изометричны.

РАЗМЕРНОСТЬ 6

Недавно Курциус $[K_u]^+$ доказал, что собственные односвязные неприводимые обобщённые симметрические римановы пространства размерности 6 могут быть грубо классифицированы следующим образом:

- А) пространства порядка 6 (которые близко примыкают к пространствам типа 9 в размерности $n = 5$);
- В) пространства порядка 4;
- С) пространства порядка 3.

Однако задача всё ещё далека от окончательного решения.

◆

Литература: $[K_1]$, $[K_3]$ и $[TL\ 1]$ (неполные результаты).

Глава VII

Классификация обобщённых аффинных симметрических пространств малых размерностей

ПРОЦЕДУРА КЛАССИФИКАЦИИ

М. Берже [В] составил полный список локальных структур аффинных симметрических пространств, допускающих транзитивную полупростую группу автоморфизмов. Пространства "разрешимого" и "смешанного" типов он оставляет в стороне; для таких пространств были получены лишь теоремы, относящиеся к топологической структуре.

В случае обобщённых аффинных симметрических пространств, как это видно из предложения V.9, разрешимые группы играют более важную роль, чем в классической ситуации (см. также добавление I). Отсюда можно понять, что классификация локальных структур обобщённых аффинных симметрических пространств — очень трудная задача.

В этом параграфе мы опишем процедуру классификации для случая малой размерности. Метод здесь подобен тому, который был использован в гл. VI, и мы ограничимся лишь пояснением некоторых различий.

А) Как и в римановом случае, мы начинаем с классификации "отмеченных" систем собственных чисел. Согласно теореме V.16, нам нужно описать множество $\mathcal{E}^n$, т.е. найти все минимальные θ -многообразия, содержащиеся в $\mathcal{A}^n$.

В римановом или унитарном аффинном случае все минимальные θ -многообразия конечны. В общем случае некоторые минимальные θ -многообразия могут быть и однопараметрическими семействами, а именно те, которые описывают обобщённые аффинные симметрические пространства бесконечного порядка. (Автору неизвестно, существуют ли минимальные θ -многообразия более высоких размерностей, см. проблему V.35.) Однако число различных минимальных θ -многообразий по-прежнему конечно.

В) Отправляясь от элемента $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ из $\mathcal{E}^n$, мы ищем канонические типы всех инфинитезимальных s -многообразий $(V, S,$

$\tilde{R}, \tilde{T}$), таких что преобразование S полупросто и имеет собственные числа θ_i . Как правило, получается гораздо больше различных канонических типов, чем в римановом случае. (Это соответствует тому факту, что общая линейная группа, действующая на тензорном пространстве, обычно допускает больше типов орбит, чем ортогональная группа, действующая на том же пространстве.)

С) Понятие "неприводимости", использовавшееся в римановом случае, заменяется здесь понятием "примитивности". Согласно предложению IV.13, обобщённое аффинное симметрическое пространство примитивно, если и только если оно не порождается приводимым регулярным s -многообразием. Односвязное о.а.с.п. примитивно, если и только если оно не порождается приводимым инфинитезимальным s -многообразием (предложение IV.16). Наконец, из теоремы IV.43 следует, что инфинитезимальное s -многообразие с приводимой системой собственных чисел всегда редуктивно. Так как мы интересуемся лишь примитивными о.а.с.п., то в пункте А) можно ограничиться подмножеством $\mathcal{E}^{*n} \subset \mathcal{E}^n$, состоящим из неприводимых систем $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ собственных чисел.

* * *

В следующем параграфе мы представим полученный С. Венгжиновским классификационный список всех локальных структур примитивных о.а.с.п. размерностей 3 и 4, которые не являются локально-симметрическими. Каждое такое о.а.с.п. (или, более строго, каждый класс локально-изоморфных о.а.с.п.) представляется здесь примарным регулярным однородным s -многообразием $(G, H, \mathcal{S})$, причём система собственных чисел автоморфизма $\mathcal{S}$ имеет вид (см. [W 1])

$$(\theta_1, \dots, \theta_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{\dim H}), \quad (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathcal{E}^n.$$

(Имеется одно исключение, касающееся типа III в размерности 4, где модель даётся лишь в виде локально-регулярного s -триплета $(g, \mathfrak{h}, \nu)$. Дело в том, что соответствующие группы Ли выглядят не очень хорошо, если использовать стандартное представление аффинными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^4$. Было бы интересно в этом случае найти какие-нибудь более естественные геометрические представления.)

КЛАССИФИКАЦИОННЫЙ СПИСОК

Размерность 3. Имеется в точности три типа обобщённых аффинных симметрических пространств, обозначаемые I, II, III. Тип I имеет по-

рядок 4, а типы II и III – бесконечного порядка. Все эти пространства примитивны и представляются следующими матричными группами и их автоморфизмами:

(I)

$$G_I = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\sigma : x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -z.$$

(II)

$$G_{II} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} \cos z & -\sin z & x \\ \sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\sigma : x' = -\alpha x, \quad y' = \alpha y, \quad z' = -z \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(III)

$$G_{III} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\sigma : x' = -\alpha x, \quad y' = \alpha y, \quad z' = -z \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

Размерность 4. Полная классификация здесь такова: имеются три типа (I, II и III ниже) обобщённых симметрических пространств порядка 3, два типа (IV и V) порядка 4 и 11 типов (VI – XVI) бесконечного порядка.

Все эти типы примитивны и представляются следующими регулярными однородными s -многообразиями (G, H, σ) :

A. Обобщённые аффинные симметрические пространства порядка 3

(I)

$$G_1 = \left\{ \begin{vmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}, \quad ad - bc = 1,$$

$$H_1 = \left\{ \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\sigma: a' = \frac{1}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}b + \frac{\sqrt{3}}{4}c + \frac{3}{4}d, \quad b' = -\frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}c + \frac{\sqrt{3}}{4}d,$$

$$c' = -\frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{\sqrt{3}}{4}d, \quad d' = \frac{3}{4}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{\sqrt{3}}{4}c + \frac{1}{4}d,$$

$$e' = -\frac{1}{2}e - \frac{\sqrt{3}}{2}f, \quad f' = \frac{\sqrt{3}}{2}e - \frac{1}{2}f.$$

(II)

$$G_2 = \left\{ \begin{vmatrix} e^s \operatorname{ch} t & e^s \operatorname{sh} t & 0 & a \\ e^s \operatorname{sh} t & e^s \operatorname{ch} t & 0 & b \\ 0 & 0 & e^{-2s} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

(ch, sh - гиперболические функции),

$$H_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\sigma: a' = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c, \quad b' = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c, \quad c' = -2a - 2b,$$

$$u' = v, \quad v' = -u + v \quad (u = s + t, \quad v = s - t).$$

(III)

Упомянутый выше локально-регулярный s -триплет $(\mathfrak{g}_3, \mathfrak{h}_3, \nu)$ определяется так:

алгебра $\mathfrak{g}_3$ изоморфна 7-мерной алгебре Ли инфинитезимальных преобразований пространства $\mathbb{R}^4[x, y, u, v]$ с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = (-2x + u)\frac{\partial}{\partial x} + (2y - v)\frac{\partial}{\partial y} + 3x\frac{\partial}{\partial u} - 3y\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_4 = (2y + v)\frac{\partial}{\partial x} + (2x + u)\frac{\partial}{\partial y} + 3y\frac{\partial}{\partial u} + 3x\frac{\partial}{\partial v},$$

$$A = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + 3v\frac{\partial}{\partial u} - 3u\frac{\partial}{\partial v}, B = \frac{\partial}{\partial u}, C = \frac{\partial}{\partial v}.$$

Подалгебра $\mathfrak{h}_3$ соответствует трёхмерной подалгебре (A, B, C) , а ν — автоморфизм порядка 3 алгебры $\mathfrak{g}_3$, индуцированный следующим преобразованием пространства $\mathbb{R}_4$:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \quad y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad u' = u, \quad v' = v.$$

В. Обобщённые аффинные симметрические пространства порядка 4

(IV)

$$G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \text{cht} & -\text{sh}t & 0 & 0 & a \\ -\text{sh}t & \text{cht} & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \text{ch}\alpha t & \frac{1}{\alpha}\text{sh}\alpha t & c \\ 0 & 0 & \alpha\text{sh}\alpha t & \text{ch}\alpha t & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} (\alpha > 0),$$

$$H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\sigma: t' = -t, \quad a' = -b, \quad b' = a, \quad c' = -c, \quad d' = d.$$

(V)

$$G_5 = \left\{ \begin{vmatrix} \text{cht} & -\text{sht} & 0 & 0 & a \\ -\text{sht} & \text{cht} & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \cos \alpha t & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t & c \\ 0 & 0 & -\alpha \sin \alpha t & \cos \alpha t & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} \quad (\alpha > 0),$$

$$H_5 = H_4,$$

$$\sigma: t' = -t, a' = -b, b' = a, c' = -c, d' = d.$$

C. Обобщённые аффинные симметрические пространства бесконечного порядка

(VI)

$$G_6 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & a \\ 0 & 1 & t & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}, \quad H_6 = \{ \text{Id} \},$$

$$\sigma: a' = \alpha^3 a, b' = \alpha b, c' = \frac{1}{\alpha} c, t' = \alpha^2 t \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(VII)

$$G_7 = \left\{ \begin{vmatrix} \text{cht} & \text{sht} & 0 & a \\ \text{sht} & \text{cht} & 0 & b \\ b\text{cht} - a\text{sht} & b\text{sht} - a\text{cht} & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$H_7 = \{ \text{Id} \},$$

$$\sigma: t' = -t, a' = \alpha a, b' = -\alpha b, c' = -\alpha^2 c \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(VIII)

$$G_8 = \left\{ \left\| \begin{array}{cccc} \cos t & \sin t & 0 & a \\ -\sin t & \cos t & 0 & b \\ b \cos t + a \sin t & b \sin t - a \cos t & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$H_8 = \{ Id \},$$

$$\sigma: t' = -t, a' = \alpha a, b' = -\alpha b, c' = -\alpha^2 c \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(IX)

$$G_9 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\}, \quad ad - bc = 1,$$

$$H_9 = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$\sigma: a' = a, b' = \frac{1}{\alpha^2} b, c' = \alpha^2 c, d' = d, e' = \frac{1}{\alpha} e, f' = \alpha f \\ (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(X)

$$G_{10} = \left\{ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\},$$

$$H_{10} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

(XI) $\sigma: a' = \frac{1}{\alpha}a, b' = b, c' = \alpha c, d' = \alpha d, e' = \alpha^2 e \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$

$$G_{11} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t & c \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$H_{11} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} (= H_4),$$

$\sigma: t' = -t, a' = \alpha a, b' = -\alpha b, c' = -c, d' = d, (\alpha \neq 0, \pm 1).$

(XII)

$$G_{12} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \operatorname{cht} & \operatorname{sht} & c \\ 0 & 0 & \operatorname{sht} & \operatorname{cht} & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$H_{12} = H_{11},$$

$\sigma: t' = -t, a' = \alpha a, b' = \alpha b, c' = -c, d' = d \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$

(XIII)

$$G_{13} = \left\{ \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & a \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \cos \alpha t & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t & c \\ 0 & 0 & -\alpha \sin \alpha t & \cos \alpha t & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} (\alpha > 0),$$

$$H_{13} = H_{11},$$

$$\sigma: t' = -t, a' = \alpha a, b' = -\alpha b, c' = -c, d' = d \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(XIV)

$$G_{14} = \left\{ \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 & a \\ -\sinh t & \cosh t & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \cosh \alpha t & \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha t & c \\ 0 & 0 & \alpha \sinh \alpha t & \cosh \alpha t & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} (\alpha > 0),$$

$$H_{14} = H_{11},$$

$$\sigma: t' = -t, a' = \alpha a, b' = -\alpha b, c' = -c, d' = d \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(XV)

$$G_{15} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & t & -\frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & a \\ 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & b \\ 0 & 0 & 1 & -t & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$H_{15} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\sigma: t' = \frac{1}{\alpha} t, a' = \frac{1}{\alpha} a, b' = b, c' = \alpha c, d' = \alpha^2 d \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

(XVI)

$$G_{16} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -t & -\frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & a \\ 0 & 1 & t & -\frac{1}{2}t^2 & b \\ 0 & 0 & 1 & -t & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$H_{16} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\sigma: t' = \alpha t, a' = \alpha^2 a, b' = \alpha b, c' = c, d' = \frac{1}{\alpha} d \quad (\alpha \neq 0, \pm 1).$$

Набросок доказательства. А) $\dim M = 3$. Сначала доказываем, что все минимальные θ -многообразия, составляющие множество $\mathcal{E}^{*3}$, представимы следующими элементами:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad (i, -i, -1), \\ (2) \quad (\alpha, -\alpha, -1) \\ (3) \quad (\alpha^2, \alpha, \frac{1}{\alpha}) \\ (4) \quad (\alpha^2, \alpha, \alpha) \\ (5) \quad (-1, -1, -1). \end{array} \right\} \alpha \neq 0, \pm 1,$$

Затем с помощью описанной выше процедуры мы получаем тип I из элемента (1), тип II из элемента (2), а тип III из каждого из

элементов (2) – (4). Элемент вида (5) приводит лишь к аффинным симметрическим пространствам.

В) $\dim M = 4$. Минимальные θ -многообразия, составляющие множество $\mathcal{G}^{*4}$, либо конечны, либо являются однопараметрическими семействами. Конечные множества представляются элементами

- a) $(\theta, \theta^2, \theta, \theta^2), \theta = e^{2\pi i/3},$
- b) $(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4), \theta = e^{2\pi i/5},$
- c) $(i, -i, -1, -1),$
- d) $(-1, -1, -1, -1),$

в точности как и в римановом случае. Элемент a) даёт типы I – III; элемент c) – типы IV, V, а также I; b) даёт только тип I, а d) приводит лишь к аффинным симметрическим пространствам.

Однопараметрические семейства представляются элементами

- (1) $(\alpha^2, \alpha, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}), \alpha \neq 0, 1, -1,$
- (2) $(\alpha, \alpha, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha}),$
- (3) $(\alpha, \alpha, \alpha^2, \frac{1}{\alpha}),$
- (4) $(\alpha, -\alpha, -1, -1),$
- (5) $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \frac{1}{\alpha}),$
- (6) $(-1, \alpha, -\alpha, -\alpha^2),$
- (7) $(-1, \alpha, -\alpha, \frac{1}{\alpha}),$
- (8) $(\alpha, \alpha^3, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}),$
- (9) $(-1, \alpha, -\alpha, -\alpha),$
- (10) $(\alpha, \alpha, \alpha^2, \alpha^3),$
- (11) $(-1, -1, \alpha, -\frac{1}{\alpha}),$
- (12) $(\alpha, \frac{1}{\alpha}, \alpha^2, \alpha^2),$
- (13) $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha^2),$
- (14) $(\alpha, \alpha, \alpha^2, \alpha^2).$

Элемент (1) приводит к типу IX; (2) – к типу XV; (3) – к типам X, XVI, а также IX; (4) – к типам XI – XIV, а также IX, IV, V; (5) – к типу VI, а также IX; (6) – к типам VI – VIII; (7) – к типам VI и IX. Элементы (8) – (10) приводят лишь к типу VI, а элементы (11) – (14) – лишь к приводимым s -многообразиям.

Подробности можно найти в [W 2].

Литература: [B], [K8], [W1], [W2].

ДОБАВЛЕНИЯ

ДОБАВЛЕНИЕ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ РАЗРЕШИМОГО ТИПА

В этом добавлении мы приведем две теоремы существования (для риманова и аффинного случаев), доказанные М. Божеком ([Вѝ1], [Вѝ2]).

Теорема 1. Для каждого чётного целого $m \geq 4$ существует неприводимое обобщённое симметрическое риманово пространство порядка m , которое диффеоморфно $\mathbb{R}^{m-1}$ и у которого компонента единицы группы всех изометрий разрешима.

Теорема 2. Для каждого целого $m \geq 3$ существует примитивное обобщённое аффинное симметрическое пространство порядка m , которое диффеоморфно $\mathbb{R}^{2m-2}$ и у которого компонента единицы группы всех аффинных преобразований разрешима.

Конструкция и набросок доказательства. А) Риманов случай. Для всякого целого $n \geq 1$ обозначим через G_n матричную группу, состоящую из всех матриц вида

$$\left\| \begin{array}{cccccc} e^{u_0} & 0 & \dots & 0 & x_0 \\ 0 & e^{u_1} & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{u_n} & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

где $(x_0, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ выбирается произвольно, а $u_0 = -u_1 - \dots - u_n$. Таким образом, низлежащим многообразием для G_n служит $\mathbb{R}^{2n+1}$ и группа G_n разрешима. Рассмотрим левоинвари-

антную метрику g на G_n , определённую формулой

$$g = \sum_{i=0}^n e^{-2u_i} (dx_i)^2 + a \sum_{\alpha, \beta=1}^n du_\alpha du_\beta, \quad a > 0.$$

Для $n = 1$ соответствующие римановы многообразия суть не что иное, как трёхмерные обобщённые симметрические пространства из теоремы VI.2. Для $n = 2$ мы получаем однопараметрическое семейство двумерных обобщённых симметрических пространств типа 9 из теоремы VI.5.

Рассмотрим автоморфизм группы G_n , заданный правилом

$$s: (x_0, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) \mapsto (-x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

где u_0 снова обозначает число $-(u_1 + \dots + u_n)$. Отображение s является также изометрией пространства (G_n, g) с единицей в качестве единственной неподвижной точки, и $s^{2n+2} = id$. Следовательно, риманово многообразие (G_n, g) является $(2n+2)$ -симметрическим пространством.

Обозначим через $\tilde{V}$ $(-)$ -связность Картана на группе G_n , а через V — риманову связность метрики g . Тогда тензорное поле разности $D = V - \tilde{V}$ инвариантно относительно левых сдвигов группы G_n . Далее, для ковариантной производной тензора кривизны R мы имеем $\nabla^k R = D^k R$, $k = 0, 1, \dots$.

Пусть $I(G_n, e)$ обозначает группу всех изометрий многообразия (G_n, g) , оставляющих единичный элемент e неподвижным. Так как наше риманово пространство аналитично, полно и односвязно, то элементы группы $I(G_n, e)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с линейными преобразованиями S касательного пространства $V = (G_n)_e$, такими что $S(g) = g$, $S(R) = R$ и $S(D^k R) = D^k R$ для $k = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что элементы алгебры Ли группы $I(G_n, g)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с эндоморфизмами A пространства V , которые как дифференцирования тензорной алгебры $\mathfrak{Z}(V)$ удовлетворяют условиям

$$A(g) = A(R) = A(DR) = \dots = A(D^k R) = \dots = 0.$$

После довольно длинных вычислений мы убеждаемся, что $A(g) = A(R) = A(DR) = 0$ влечёт $A_1 = 0$. Значит, группа $I(G_n, e)$ конечна и компонента единицы группы всех изометрий $I(G_n)$ изоморфна G_n .

Для $\varphi \in I(G_n, e)$ отображение $g \mapsto \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ есть автоморфизм группы G_n , и, таким образом, касательное отображение

φ_{*e} является изометрическим автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$, где мы отождествляем $\mathfrak{g}$ с $T_e(G_n)$. Можно показать, что отображение $\varphi \mapsto \varphi_{*e}$ есть изоморфизм группы $I(G_n, e)$ на группу L всех изометрических автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}_n = T_e(G_n)$. Остаётся найти структуру группы L .

Положим

$$X_i = e^{u_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Прямая выкладка показывает, что $X_0, X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$ образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ группы G_n . Далее, пусть $\mathbb{Z}_2$ обозначает мультипликативную группу с двумя элементами $1, -1$, а S_{n+1} — симметрическую группу множества индексов $\{0, 1, \dots, n\}$. Рассмотрим отображение

$$\Phi: (\mathbb{Z}_2)^{n+1} \times S_{n+1} \longrightarrow GL(\mathfrak{g}_n),$$

заданное формулами

$$\Phi(\varepsilon, \sigma) X_i = \varepsilon_i X_{\sigma(i)},$$

$$\Phi(\varepsilon, \sigma) U_\alpha = \begin{cases} U_{\sigma(\alpha)}, & \text{если } \sigma(0) = 0 \\ U_{\sigma(\alpha)} - U_{\sigma(0)}, & \text{если } \sigma(0) \neq 0, \sigma(\alpha) \neq 0, \\ -U_{\sigma(0)}, & \text{если } \sigma(0) \neq 0, \sigma(\alpha) = 0, \end{cases}$$

для всех $i = 0, 1, \dots, n$ и $\alpha = 1, \dots, n$. Можно доказать, что Φ есть изоморфизм группы $(\mathbb{Z}_2)^{n+1} \times S_{n+1}$ на подгруппу в $GL(\mathfrak{g}_n)$, состоящую из всех изометрических автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}_n$. Далее, симметрии пространства (G_n, q) в единице e соответствуют парам $(\varepsilon, \sigma) \in (\mathbb{Z}_2)^{n+1} \times S_{n+1}$, для которых $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ содержит нечётное число минус единиц, а σ — полный цикл. Отсюда видно, что все симметрии многообразия (G_n, q) в точке e имеют порядок $2n+2$ и сопряжены друг другу.

Неприводимость многообразия (G_n, q) легко следует из того факта, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ не является прямой суммой никаких двух собственных идеалов.

Итак, пространство $(G_{\frac{1}{2}(n-2)}, q)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы I.

В) Аффинный случай. Начинаем с той же матричной группы G_n , что и раньше:

$$G_n \simeq \mathbb{R}^{2n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n).$$

Пусть H_n обозначает одномерную подгруппу группы G_n , заданную равенствами

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = -x_n = t, \quad u_1 = \dots = u_n = 0.$$

Рассмотрим однородное пространство $M_n = G_n / H_n$. Легко видеть, что $M_n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ для всех $n \geq 2$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ обладает базисом $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_n, U_1, \dots, U_n\}$ с таблицей умножения

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j] &= [U_\alpha, U_\beta] = 0, \quad [Y_0, U_\alpha] = Y_\alpha, \\ [Y_\alpha, U_\beta] &= \frac{1 + \delta_{\alpha\beta}}{n} \left(\sum_{p=0}^n Y_p \right) - \delta_{\alpha\beta} Y_\alpha, \\ i, j &= 0, 1, \dots, n; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Ясно, что $\mathfrak{h}_n$ натянута на Y_0 . Положим $\mathfrak{m}_n = (Y_1, \dots, Y_n, U_1, \dots, U_n)$. Пространство G_n / H_n редуکتивно относительно разложения $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{h}_n \dot{+} \mathfrak{m}_n$. Пусть $\tilde{V}_n$ — каноническая связность. Стандартными вычислениями находим, что алгебра Ли $\mathfrak{q}_n$ полной аффинной группы $A(M_n, \tilde{V}_n)$ обладает базисом $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_n, U_1, \dots, U_n, U\}$, для которого умножение задаётся соотношениями (1) и дополнительными соотношениями $[U, Y_i] = Y_i$, $[U, U_\alpha] = 0$. В частности, $\mathfrak{g}_n$ есть подалгебра коразмерности 1 в $\mathfrak{q}_n$. Алгебра $\mathfrak{q}_n$, очевидно, разрешима, и, значит, компонента единицы группы $A(M_n, \tilde{V}_n)$ разрешима. Ясно, что G_n — группа трансвекций многообразия $(M_n, \tilde{V}_n)$, а $\mathfrak{g}_n$ — алгебра трансвекций.

Далее, имеется взаимно-однозначное соответствие между множеством всех допустимых s -структур на $(M, \tilde{V}_n)$ и множеством всех "допустимых" автоморфизмов Φ алгебры $\mathfrak{g}_n$, характеризуемых свойствами $\Phi(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_n$.

Рассмотрим множество C_{n+1} всех циклов среди перестановок множества индексов $\{0, 1, \dots, n\}$. Для любой пары $(r, \sigma) \in \mathbb{R} \times C_{n+1}$ мы определим линейное преобразование $F(r, \sigma)$ алгебры $\mathfrak{g}_n$ формулами

$$\begin{aligned} F(r, \sigma)(Y_0) &= Y_0, \\ F(r, \sigma)(Y_\alpha) &= \begin{cases} Y_{\sigma(\alpha)} - Y_{\sigma(0)}, & \text{если } \sigma(\alpha) \neq 0, \\ -Y_{\sigma(0)}, & \text{если } \sigma(\alpha) = 0, \end{cases} \quad (2) \\ F(r, \sigma)(U_\alpha) &= \begin{cases} r(Y_{\sigma(\alpha)} - Y_{\sigma(0)} + U_{\sigma(\alpha)} - U_{\sigma(0)}), & \text{если } \sigma(\alpha) \neq 0, \\ -r Y_{\sigma(0)} - U_{\sigma(0)}, & \text{если } \sigma(\alpha) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что Γ — биективное отображение $\mathbb{K} \times C_{n+1}$ на множество всех допустимых автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}_n$. Следовательно, каждый допустимый автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}_n$ или бесконечного порядка, или порядка $n+1$, и то же верно для допустимых s -структур на $(M_n, \tilde{V}_n)$.

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ не является прямой суммой никаких своих идеалов, то группа трансвекций $G_n = \text{Tr}(M_n, \tilde{V}_n)$ не является прямым произведением, а значит, наше аффинное редуктивное пространство $(M_n, \tilde{V}_n)$ не может быть прямым произведением (см. теорему I.35). В частности, $(M_n, \tilde{V}_n)$ примитивно как обобщённое аффинное симметрическое пространство.

Теперь остаётся только положить $m = n+1$, и теорема 2 доказана. $\square$

ДОБАВЛЕНИЕ 2. НЕПРИВОДИМЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Говорят, что аффинное редуктивное пространство $(M, \tilde{V})$ неприводимо, если для любой точки $p \in M$ суженная группа голономии с опорной точкой p действует неприводимо на касательном пространстве $T_p(M)$.

Теорема 1. Если обобщённое аффинное симметрическое пространство $(M, \tilde{V})$ неприводимо, то его группа трансвекций $\text{Tr}(M)$ полупроста. Кроме того, для каждой допустимой регулярной s -структуры $\{s_x\}$ на $(M, \tilde{V})$ компонента единицы группы автоморфизмов $\text{Aut}(M, \{s_x\})$ совпадает с $\text{Tr}(M)$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь начало $o \in M$. Пусть $\{s_x\}$ — допустимая регулярная s -структура на $(M, \tilde{V})$, $\text{Aut}(M) = \text{Aut}(M, \{s_x\})$ — группа всех автоморфизмов, а $\beta: \text{Aut}(M) \rightarrow \text{Aut}(M)$ — автоморфизм групп Ли, соответствующий симметрии s_o . Пусть, далее, G — связная β -инвариантная подгруппа группы $\text{Aut}(M)$, транзитивно действующая на M . Тогда $\text{Tr}(M) \subset G$, согласно II.39, и $(G, G_o, \beta|_G)$ есть регулярное однородное s -многообразие (см. II.38). Мы будем записывать последнюю тройку в краткой форме (G, H, β) .

Согласно I.26, линейное представление группы изотропии $(\text{Tr}(M))_o$ на касательном пространстве $T_o(M)$ точно, а образ его может быть отождествлён с группой голономии многообразия $(M, \tilde{V})$ с опорной точкой o . Далее, компонента единицы H^* группы H содержит компоненту единицы группы $(\text{Tr}(M))_o$ и, таким образом, действует неприводимо на касательном пространстве T_o .

(М) . Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{h}$ — каноническое разложение, превращающее G/H в редуктивное однородное пространство; $\text{ad}(\mathfrak{h})(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. Тогда условие неприводимости группы H° можно переформулировать следующим образом: сужение алгебры $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ на подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ неприводимо на $\mathfrak{m}$. Дифференциал $\mathfrak{b}_*$ автоморфизма $\mathfrak{b}$ есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{b}_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, такой что $\mathfrak{b}_*|_{\mathfrak{h}} = \text{id}$, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{h}$ — разложение Фиттинга относительно линейного эндоморфизма $A = \mathfrak{b}_* - \text{Id}$, т.е. $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{0A}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{1A}$. Напомним, что алгебра Ли группы $(\text{Tr}(M))_0$ есть $(\mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) \cap \mathfrak{h}$ и что она изоморфна алгебре голономии с опорной точкой o (см. доказательство леммы I.30).

Обозначим через $\mathfrak{r}$ радикал алгебры $\mathfrak{g}$ и предположим, что $\mathfrak{r} \neq (0)$. Тогда можно указать максимальное целое число $k \geq 0$, такое что $\mathcal{D}^k \mathfrak{r} \neq (0)$, где $\{\mathcal{D}^i \mathfrak{r}\}$ обозначает производный ряд радикала $\mathfrak{r}$. Далее, идеал $\mathcal{D}^k \mathfrak{r}$ инвариантен относительно автоморфизма $\mathfrak{b}_*$, а также относительно A . Используя разложение Фиттинга для $\mathcal{D}^k \mathfrak{r}$ относительно эндоморфизма A , легко получаем

$$\mathcal{D}^k \mathfrak{r} = \mathcal{D}^k \mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} + \mathcal{D}^k \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}.$$

Так как $\mathcal{D}^k \mathfrak{r}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, а $\text{ad}(\mathfrak{h})\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, мы заключаем, что $\text{ad}(\mathfrak{h})(\mathcal{D}^k \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}) \subset \mathcal{D}^k \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}$. Из неприводимости $\text{ad}(\mathfrak{h})$ на $\mathfrak{m}$ следует, что либо $\mathcal{D}^k \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, либо $\mathcal{D}^k \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m} = (0)$.

В первом случае имеем $\mathfrak{m} \subset \mathcal{D}^k \mathfrak{r}$ и

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset [\mathcal{D}^k \mathfrak{r}, \mathcal{D}^k \mathfrak{r}] = \mathcal{D}^{k+1} \mathfrak{r} = (0).$$

В частности, $(\mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) \cap \mathfrak{h} = (0)$, так что алгебра голономии тривиальна; мы пришли к противоречию. Во втором случае имеем $\mathcal{D}^k \mathfrak{r} \subset \mathfrak{h}$ и

$$[\mathcal{D}^k \mathfrak{r}, \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathcal{D}^k \mathfrak{r}, \mathfrak{m}] \subset [\mathcal{D}^k \mathfrak{r}, \mathfrak{g}] \subset \mathcal{D}^k \mathfrak{r}.$$

Итак, $[\mathcal{D}^k \mathfrak{r}, \mathfrak{m}] = (0)$, а значит, $\mathcal{D}^k \mathfrak{r} = (0)$, поскольку $\text{ad}(\mathfrak{h})$ эффективно действует на $\mathfrak{m}$. (Вспомним, что линейное представление изотропии группы H° в $T_o(M)$ точное, так как H° состоит из аффинных преобразований.) Но это невозможно в силу выбора k . Следовательно, $\mathfrak{g}$ полупроста.

Остается показать, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ есть алгебра Ли группы $\text{Tr}(M)$. Пусть Φ обозначает форму Киллинга на $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{b}_*$ будет изометрией относительно (индефинитного) скалярного произведения Φ . Имеем $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = (0)$. Действительно, выберем $X \in \mathfrak{m}$, $U \in \mathfrak{h}$. Тогда, поскольку $A = \mathfrak{b}_* - \text{Id}$ — линейный автоморфизм на

$\mathfrak{m}$, то $X = AY$ для некоторого $Y \in \mathfrak{m}$. Отсюда

$$\Phi(X, U) = \Phi(\sigma_* Y - Y, U) = \Phi(\sigma_* Y, \sigma_* U) - \Phi(Y, U) = 0.$$

Далее, основное свойство формы Киллинга состоит в том, что ортогональное дополнение идеала — снова идеал. В частности, идеал $(\mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}])^\perp$ содержится в $\mathfrak{m}^\perp = \mathfrak{h}$, а значит, $(\mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}])^\perp = (0)$, так как G эффективно действует на $G/H = M$. (См. [Фе3]'.) $\square$

Замечание. Рассмотрим противоположную ситуацию, когда суженная группа голономии многообразия $(M, \tilde{V})$ тривиальна. Тогда подалгебра $(\mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) \cap \mathfrak{h}$ тривиальна и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Следовательно, $R = 0$ и группа $\text{Tr}(M)$ разрешима, согласно II.41.

* Теорема 2. Всякое неприводимое обобщённое аффинное симметрическое пространство $(M, \tilde{V})$ либо
(а) локально-симметрично, либо
(б) 3-симметрично, но не k -симметрично при $k \neq 3$.³³⁾

Доказательство. Пусть $\{s_x\}$ — допустимая регулярная s -структура на $(M, \tilde{V})$, такая что $(s_x)^3 \neq \text{id}$. Пусть, далее, $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ — инфинитезимальная модель многообразия $(M, \{s_x\})$, а J — множество всех собственных чисел структуры $\{s_x\}$. Из доказательства теоремы IV.40 легко усматривается следующее: если $\lambda \in J$ вещественно, то собственное подпространство $V_\lambda \subset V$ инвариантно относительно группы автоморфизмов модели $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$. Если $\alpha \in J$ имеет ненулевую мнимую часть, то вещественное подпространство $W_\alpha = (V_\alpha + V_{\bar{\alpha}}) \cap V$ инвариантно относительно той же группы.

Отождествим V с касательным пространством M_p в какой-нибудь точке p . Тогда инвариантность относительно автоморфизмов инфинитезимального многообразия $(V, S, \tilde{K}, \tilde{T})$ влечёт инвариантность относительно группы голономии многообразия $(M, \tilde{V})$ с опорной точкой p . Так как $(M, \tilde{V})$ неприводимо, то V не может содержать нетривиальное инвариантное подпространство W . Таким образом, возможны лишь следующие случаи:

- (i) $J = \{\lambda\}$, λ вещественно, $\lambda^2 \neq \lambda$;
- (ii) $J = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$, α имеет ненулевую мнимую часть;

здесь $\alpha^3 \neq 1$ и, следовательно, $\alpha^2 \neq \alpha, \bar{\alpha}$.

На основании утверждения (а) предложения IV.38 мы заключаем, что в каждом случае $\tilde{T} = 0$. Следовательно, $(M, \tilde{V})$ локально-симметрично. $\square$

◆

Литература: [Фе3]', [КН2]'.

ДОБАВЛЕНИЕ 3. ОБОБЩЁННЫЕ ПОТОЧЕЧНО СИММЕТРИЧЕСКИЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Обобщённое поточечно симметрическое риманово пространство (или, кратко, о.п.с.п.) – это риманово многообразие, допускающее хотя бы одну (не обязательно регулярную) риманову s -структуру (см. 0.4). Порядком о.п.с.п. называется минимум порядков таких структур.

Переформулировка теорем 0.1 и 0.6 дает:

Теорема 1. Каждое о.п.с.п. однородно.

Теорема 2. Каждое о.п.с.п. имеет конечный порядок.

Доказательства следующих теорем получаются лёгкой модификацией доказательства для "регулярного" случая.

Теорема 3. Пусть (M, g) – односвязно о.п.с.п. и $M = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_r$ – его разложение де Рама. Тогда каждый сомножитель M_i есть о.п.с.п.

Теорема 4. Для любого $k \geq 2$ существует компактное о.п.с.п. (M, g) порядка k , для которого группа $I^0(M, g)$ полупроста.

* * *

Заметим, что все о.п.с.п. порядка 2, равно как и все о.п.с.п. размерности 2, являются римановыми симметрическими пространствами. Цель настоящего добавления – описать некоторое семейство о.п.с.п., не являющихся обобщёнными симметрическими (см. [K4]).

Рассмотрим комплексное декартово пространство $\mathbb{C}^{2n+1} [z^1, \dots, z^{2n+1}]$, наделённое эрмитовой метрикой

$$g_\lambda = \sum_{i=1}^{2n+1} dz^i d\bar{z}^i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{2n+1} z^i d\bar{z}^i \right) \left(\sum_{j=1}^{2n+1} \bar{z}^j dz^j \right), \quad \lambda \neq 0, \lambda > -1.$$

Рассмотрим сферу S^{4n+1} , заданную уравнением $\sum_{i=1}^{2n+1} z^i \bar{z}^i = 1$, и вещественную риманову метрику $\hat{g}_\lambda$ на S^{4n+1} , индуцированную метрикой g_λ . (Вещественные координаты x^i, y^j вводятся здесь при помощи разложения $z^j = x^j + iy^j$, $j = 1, \dots, 2n+1$.)

Заметим, что для $-1 < \lambda < 0$ многообразие $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$ гомотетично квадрике комплексного проективного пространства $P_{2n+1}(\mathbb{C})$, наделённого метрикой Фубини – Штуди (см. [KH2]', стр. 151).

Для $n = 1$ мы получаем тип 6а из классификационного списка

обобщённых симметрических римановых пространств размерности 5 (гл. VI).

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 5. Для $n \geq 2$ риманово пространство $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$ является обобщённым поточечно симметрическим пространством порядка 4, но не является обобщённым симметрическим пространством.

Доказательство. Сначала установим первое утверждение. Возьмём в качестве начала o в S^{4n+1} точку $(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{C}^{2n+1}$. Преобразование пространства $\mathbb{C}^{2n+1}$, определённое формулами

$$(z^{2i-1})' = \bar{z}^{2i}, \quad (z^{2i})' = \bar{z}^{2i-1} \quad (i=1, \dots, n), \quad (z^{2n+1})' = \bar{z}^{2n+1},$$

индуцирует преобразование $\tilde{S}_o$ сферы S^{4n+1} с неподвижной точкой o . Ясно, что $\tilde{S}_o$ есть изометрия пространства $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$. Легко видеть, что касательное отображение $(\tilde{S}_o)_*o$ не имеет ненулевых неподвижных векторов в касательном пространстве $(S^{4n+1})_o$ и, значит, o есть изолированная неподвижная точка отображения $\tilde{S}_o$. Кроме того, $(\tilde{S}_o)^4 = id$.

Группа $U(2n+1)$ всех унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^{2n+1}$ (относительно его естественной структуры линейного эрмитова пространства) сохраняет метрику g_λ и действует транзитивно и эффективно на S^{4n+1} . Таким образом, $U(2n+1)$ можно рассматривать как группу изометрий риманова многообразия $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$. Пусть $U(2n)$ обозначает подгруппу изотропии группы $U(2n+1)$ в точке o , и пусть $\pi: U(2n+1) \rightarrow U(2n+1)/U(2n) \simeq S^{4n+1}$ — проекция расслоения. Выберем какое-нибудь (не обязательно непрерывное!) сечение $\rho: S^{4n+1} \rightarrow U(2n+1)$. Тогда риманова s -структура порядка 4 на $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$ может быть определена формулой

$$\tilde{S}_x = \rho(x) \circ \tilde{S}_o \circ \rho(x)^{-1}, \quad x \in S^{4n+1}.$$

Заметим, что $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$ не будет локально-симметрическим (легкая выкладка) и оно — нечётной размерности. Следовательно, порядок пространства не может быть равен 2 или 3 и потому равен 4.

Докажем теперь вторую, нетривиальную, часть теоремы.

Ниже $SO(4n+2)$, $U(2n+1)$, $SU(2n+1)$ будут обозначать группы преобразований пространства S^{4n+1} , которые индуцируются соответствующими группами преобразований в данном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{4n+2}$ или комплексном пространстве $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Лемма. Пусть K — связная группа Ли изометрий пространства $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$, действующая транзитивно на S^{4n+1} . Тогда $K \supset SU(2n+1)$.

Доказательство. Согласно результатам Монтгомери — Сэмелсона [MS] и Бореля [B1], [B2], каждая компактная связная группа Ли преобразований, транзитивно действующая на S^{4n+1} , изоморфна одной из следующих групп: $SO(4n+2)$, $U(2n+1)$, $SU(2n+1)$. Пусть G — компонента единицы группы всех изометрий $I(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$. Тогда $G \supset U(2n+1)$. Группа G не может быть изоморфна $SO(4n+2)$, иначе метрика $\hat{g}_\lambda$ была бы метрикой постоянной кривизны. Итак, $G = U(2n+1)$.

Пусть K — произвольная связная транзитивная группа изометрий пространства $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$. Ясно, что $K \subset U(2n+1)$. Если K изоморфна $U(2n+1)$, то $K = U(2n+1)$ и лемма доказана. Пусть K изоморфна $SU(2n+1)$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{K}$ изоморфна $\mathfrak{su}(2n+1)$ и $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{u}(2n+1)$. С другой стороны, $\mathfrak{u}(2n+1) = \mathfrak{su}(2n+1) \oplus \mathbb{R}$ (прямая сумма) и подалгебра $\mathfrak{su}(2n+1)$ проста. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{K} = \mathfrak{su}(2n+1)$ и, следовательно, $K = SU(2n+1)$. $\square$

Предположим теперь, что на $(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda)$ имеется риманова регулярная s -структура $\{s_x\}$, и положим

$$K = \text{Tr}(S^{4n+1}, \{s_x\}) \subset I(S^{4n+1}, \hat{g}_\lambda).$$

Согласно лемме, $K \supset SU(2n+1)$. Для группы изотропии K_0 точки o имеем $K_0 \supset SU(2n)$ (где $SU(2n)$ рассматривается как подгруппа в $SU(2n+1)$, оставляющая все точки пространства S^{4n+1} вида $(0, \dots, 0, e^{i\varphi})$ неподвижными). Преобразование s_o перестановочно со всеми элементами группы K_0 , и в частности со всеми элементами из $SU(2n)$.

Рассмотрим касательное пространство $(S^{4n+1})_o$. Оно порождается векторами

$$e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_o, f_j = \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_o, \quad i = 1, \dots, 2n, j = 1, \dots, 2n+1.$$

Здесь f_{2n+1} — вектор, ортогональный к $4n$ -мерному подпространству V , порождённому векторами $e_i, f_i, i = 1, \dots, 2n$.

Пусть H обозначает образ вещественного представления изотропии группы $SU(2n)$ в касательном пространстве $(S^{4n+1})_o$, а $S_o = (s_o)_*o$. Все линейные преобразования $h \in H$, а также S_o суть ортогональные преобразования пространства $(S^{4n+1})_o$ относительно скалярного произведения $(\hat{g}_\lambda)_o$. Группа H действу-

ет транзитивно на подпространстве V , и все неподвижные при действии H векторы имеют вид $\lambda \cdot f_{2n+1}$. Преобразование S_0 перестановочно с каждым $h \in H$, и, следовательно, вектор $S_0(f_{2n+1})$ неподвижен при действии H . Таким образом, $S_0(f_{2n+1}) = \pm f_{2n+1}$, а поскольку S_0 не допускает ненулевых неподвижных векторов, то $S_0(f_{2n+1}) = -f_{2n+1}$. Кроме того, подпространство V инвариантно относительно S_0 .

Пусть $\mathfrak{h}$ обозначает алгебру Ли группы H . Для каждой пары (r, s) , $1 \leq r < s \leq 2n$, рассмотрим эндоморфизмы $B_{rs}, C_{rs} \in \mathfrak{h}$, определённые так:

$$B_{rs}(e_r) = e_s, \quad B_{rs}(f_r) = f_s, \quad B_{rs}(e_s) = -e_r, \quad B_{rs}(f_s) = -f_r,$$

$$C_{rs}(e_r) = -f_s, \quad C_{rs}(f_r) = e_s, \quad C_{rs}(e_s) = -f_r, \quad C_{rs}(f_s) = e_r,$$

$$B_{rs}(e_i) = B_{rs}(f_i) = C_{rs}(e_i) = C_{rs}(f_i) = 0 \quad \text{для } i \neq r, s.$$

Пусть S_0 удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} S_0(e_i) &= \sum_{j=1}^{2n} [a_i^j e_j + b_i^j f_j], \\ S_0(f_i) &= \sum_{j=1}^{2n} [c_i^j e_j + d_i^j f_j], \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Из равенств

$$\begin{aligned} (B_{rs} \circ S_0)(e_i) &= (S_0 \circ B_{rs})(e_i), \\ (B_{rs} \circ S_0)(f_i) &= (S_0 \circ B_{rs})(f_i), \end{aligned} \quad i \neq r, s,$$

мы получаем $a_i^j = b_i^j = c_i^j = d_i^j = 0$ для всех i, j , таких что $1 \leq i \neq j$. (Для этого шага условие $n \geq 2$ является решающим.)

Из соотношений

$$\begin{aligned} (B_{rs} \circ S_0)(e_r) &= (S_0 \circ B_{rs})(e_r), \\ (B_{rs} \circ S_0)(f_r) &= (S_0 \circ B_{rs})(f_r) \end{aligned}$$

получаем

$$a_r^r = a_s^s, \quad b_r^r = b_s^s, \quad c_r^r = c_s^s, \quad d_r^r = d_s^s, \quad 1 \leq r < s \leq 2n.$$

Наконец, из соотношения

$$(C_{rs} \circ S_0)(e_r) = (S_0 \circ C_{rs})(e_r)$$

получаем

$$a_r^r = d_s^s = a, \quad b_r^r = -c_s^s = b, \quad 1 \leq r < s \leq 2n.$$

Тем самым мы доказали, что

$$S_0(e_j) = ae_j + bf_j, \quad S_0(f_j) = -be_j + af_j$$

для $1 \leq j \leq 2n$, где $a^2 + b^2 = 1$ и $S_0(f_{2n+1}) = -f_{2n+1}$, или, в комплексной форме,

$$S_0\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_o\right) = e^{i\varphi}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)_o\right), \quad j = 1, \dots, 2n, \quad S_0(f_{2n+1}) = -f_{2n+1}.$$

Обозначим теперь через $Z_1, \dots, Z_{2n+1}$ те комплексные векторные поля на S^{4n+1} , которые являются касательными компонентами векторных полей $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{2n+1}}$ соответственно.

Пусть ∇ и R обозначают соответственно риманову связность и тензорное поле кривизны метрики $\hat{g}_\lambda$. Длинное, но стандартное вычисление показывает, что

$$(\nabla_{Z_2} R)_o(Z_1, \bar{Z}_1, Z_{2n+1}, \bar{Z}_2) \neq 0,$$

т.е.

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^2}} R\right)_o\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_o, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}\right)_o, f_{2n+1}, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^2}\right)_o\right) \neq 0.$$

Если применить к каждому аргументу отображение S_0 и использовать инвариантность $(\nabla R)_o$ относительно S_0 , то мы получим, что левая часть последнего соотношения равна нулю. Тем самым мы пришли к противоречию. $\square\square$

Проблема 1. Рассмотрим следующие классы римановых многообразий:

- S_1 - класс всех о.п.с.п.,
- S_2 - класс всех римановых многообразий, допускающих непрерывную s -структуру,
- S_3 - класс всех римановых многообразий, допускающих гладкую s -структуру,
- S_4 - класс всех обобщённых симметрических римановых пространств.

Является ли каждый класс S_{i+1} собственным подклассом в S_i ($i = 1, 2, 3$)?

Проблема 2. Пусть (M, V) – аффинное многообразие, допускающее аффинную s -структуру $\{s_x\}$. (Здесь каждое отображение s_x есть аффинное преобразование с изолированной неподвижной точкой x , никаких других предположений мы не делаем.) В связи с теоремой Бриккела (теоремой I) выяснить:

- (a) будет ли (M, V) однородным?
- (b) будет ли (M, V) полным?

Литература: специально по теме этого добавления – [Bž1], [Bž2], [MS]; другие работы – [GL2], [K1], [K4], [K5], [L0].

ДОБАВЛЕНИЕ 4. НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ s -СТРУКТУРЫ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Регулярную s -структуру $\{s_x\}$ на римановом многообразии (M, g) мы называем параллельной или непараллельной в соответствии с тем, какое из соотношений, $\nabla S = 0$ или $\nabla S \neq 0$, имеет место (см. гл. 0). Если (M, g) – риманово симметрическое пространство, то регулярная s -структура геодезических симметрий пространства (M, g) индуцирует тензорное поле $S = -I$, которое параллельно. Спрашивается, существуют ли на римановых симметрических пространствах также и непараллельные регулярные s -структуры? И что представляют собой римановы симметрические пространства, имеющие такую степень свободы?

Используя результаты, касающиеся классификации обобщённых симметрических римановых пространств размерности $n \leq 5$, мы сможем решить эту задачу (при обычных предположениях) для размерностей $n \leq 5$. Начнём с некоторых предварительных замечаний.

Во-первых, для каждого риманова симметрического пространства (M, g) с непараллельной регулярной s -структурой универсальное накрывающее многообразие $(\tilde{M}, \tilde{g})$ является симметрическим и тоже допускает непараллельную регулярную s -структуру. Так что мы можем ограничить себя односвязными пространствами.

Во-вторых, пусть $(M, g, \{s_x\})$ – односвязное риманово регулярное s -многообразие, где (M, g) является симметрическим, а структура $\{s_x\}$ непараллельна. Допустим, что это s -многообразие приводимо, т.е.

$$(M, g, \{s_x\}) = (M_1, g_1, \{s_u^1\}) \times (M_2, g_2, \{s_v^2\}).$$

Тогда (M_1, g_1) и (M_2, g_2) оба симметричны и по крайней мере одна из s -структур $\{s_u^1\}$, $\{s_v^2\}$ непараллельна. Таким образом, приводимые римановы регулярные s -многообразия и приводимые инфинитезимальные s -многообразия можно не принимать во внимание при решении нашей задачи. (С другой стороны, как увидим ниже, исключить из рассмотрения приводимые римановы многообразия нельзя.)

Наконец, если односвязное пространство (M, g) допускает непараллельную (и неприводимую) регулярную s -структуру $\{s_x\}$, то оно также допускает непараллельную регулярную s -структуру $\{s'_x\}$ с системой собственных чисел $(\theta'_i) \in \mathcal{D}^{*n}$.

Ясно, что риманова регулярная s -структура $\{s_x\}$ на (M, g) непараллельна, если и только если тензор кручения $\tilde{T} \neq 0$. Действительно, в силу формулы (14) гл. III, $\tilde{T} = 0 \iff \tilde{\nabla} = \nabla$, а в соответствии с теоремой 0.33 равенство $\tilde{\nabla} = \nabla$ имеет место, если и только если $\nabla S = 0$.

Напомним вкратце нашу классификационную процедуру, использованную в гл. VI. Основные шаги процедуры (для фиксированной размерности n) были таковы:

(а) классификация всех (неизоморфных) приводимых римановых инфинитезимальных s -многообразий с тензором кручения $\tilde{T} \neq 0$, у которых системы собственных чисел принадлежат $\mathcal{D}^{*n}$;

(б) построение неприводимых односвязных римановых регулярных s -многообразий $(M, g, \{s_x\})$ по данным инфинитезимальным многообразиям;

(с) составление списка всех неизометричных обобщённых симметрических римановых пространств (M, g) , получаемых таким путём;

(д) исключение из списка всех пространств (M, g) , которые оказываются симметрическими;

(е) исключение из списка всех пространств (M, g) , которые оказываются приводимыми римановыми многообразиями.

Ясно, что пространства, которые нас интересуют, суть в точности те, которые были исключены на шаге (д).

Теорема 1. Симметрические пространства размерностей 2, 3 и 4 (односвязные или нет) допускают только параллельные регулярные s -структуры.

Доказательство. В размерности $n = 2$ тензор кручения $\tilde{T}$ всегда равен нулю. Просмотр классификационной процедуры для размерностей $n = 3$ и 4 показывает, что все получаемые здесь обобщённые

симметрические римановы пространства не являются локально-симметрическими. $\square$

Что касается размерности $n = 5$, то для неё детали классификации не были приведены, и читатель отсылается к оригинальной работе [КЗ]. Совсем вкратце, симметрические пространства появляются здесь для некоторых "особых" значений параметров, а именно в следующих случаях:

(а) $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, $\alpha = 0$, $c = 0$ в типе 4,

(b) $\mu = 0$ в типе 6а,

(с) $\mu = 1$ в типе 8а.

В итоге приходим к такому результату (дополненному некоторыми подробностями):

Теорема 2. Единственными односвязными римановыми симметрическими пространствами размерности 5, допускающими непараллельную регулярную s -структуру, являются E^5 , $S^5(r)$ и $E^3 \times S^2(r)$.

Более подробно:

(а) В пространстве E^5 мы получаем непараллельную s -структуру $\{s_x^\rho\}$ порядка 4, зависящую от вещественного параметра $\rho > 0$, следующим образом. отождествляем E^5 с пространством $\mathbb{C}^2(z, w) \times \mathbb{R}^1(t)$ и определяем симметрию σ_0 в начале $o = (0, 0, 0)$ соотношениями $z' = iw$, $w' = iz$, $t' = -t$. Далее, рассмотрим для каждого $\rho > 0$ односвязную транзитивную группу преобразований G_ρ :

$$z' = e^{\rho i t_0} z + z_0, \quad w' = e^{-\rho i t_0} w + w_0, \quad t' = t + t_0.$$

Тогда множество $\{s_x^\rho: x \in E^5\}$ совпадает с множеством $\{g \circ \sigma_0 \circ g^{-1}: g \in G_\rho\}$.

(b) В пространстве $S^5(r)$ мы получаем непараллельную s -структуру $\{s_x\}$ порядка 4 так. отождествляем $S^5(r)$ с подмногообразием $z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 + z^3 \bar{z}^3 = r^2$ комплексного эвклидова пространства $\mathbb{C}^3(z^1, z^2, z^3)$ и определяем симметрию σ_0 в "начале" $o = (0, 0, r) \in \mathbb{C}^3$ пространства S^5 соотношениями $(z^1)' = \bar{z}^2$, $(z^2)' = -\bar{z}^1$, $(z^3)' = \bar{z}^3$. Тогда множество $\{s_x: x \in S^5(r)\}$ совпадает с множеством $\{g \circ \sigma_0 \circ g^{-1}: g \in SU(3)\}$.

(с) В пространстве $E^3 \times S^2(r)$ мы получаем непараллельную s -структуру $\{s_x\}$ порядка 4 так. отождествляем $E^3 \times S^2(r)$ с расслоением сфер над базисным пространством $E^3(x, y, z)$, а именно с множеством всех пар (m, t) , где $m \in E^3$, $t \in T_m(E^3)$, $|t| = r$. Пусть $I^e(E^3)$ — группа всех сохраняющих ориентацию

евклидовых движений пространства E^3 , и пусть $J^1(I^e(E^3))$ обозначает её первое продолжение – группу, действующую на расслоении сфер $E^3 \times S^2(r)$. Можно естественным образом отождествить касательное расслоение $T(E^3)$ с пространством $E^6(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)$, а пространство $E^3 \times S^2(r)$ – с подмногообразием в E^6 , задаваемым соотношением $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$. Наконец, рассмотрим преобразование пространства E^6 , задаваемое соотношениями $x' = -y, y' = x,$

$$z' = -z, \alpha' = \beta, \beta' = -\alpha, \gamma' = \gamma.$$

Индукцированное преобразование $\mathcal{C}_0$ пространства $E^3 \times S^2(r)$ будет тогда его симметрией порядка 4 в точке $(0, 0, 0; 0, 0, r)$. Искомая регулярная s -структура $\{s_x: x \in E^3 \times S^2(r)\}$ совпадает с множеством $\{g \circ \mathcal{C}_0 \circ g^{-1}: g \in J^1(I^e(E^3))\}$.

Литература: [КЗ], гл. 16.

ДОБАВЛЕНИЕ 5. НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вольф и Грэй [WoG] изучили структуру и геометрию однородных пространств G/K , где G – редуктивная группа Ли, а K – её открытая подгруппа, состоящая из неподвижных точек некоторого полупростого автоморфизма θ группы G . (Напомним, что группа Ли G называется редуктивной, если её присоединённая группа $\text{ad } G$ полупроста.) В [WoG] дана полная классификация всех пространств G/K , которые односвязны и порождаются автоморфизмом θ порядка 3. Для автоморфизмов θ произвольного конечного порядка указан лишь некий общий метод классификации. [Полное описание (а не только классификация) всех автоморфизмов конечного порядка для полупростых алгебр Ли было найдено В.Кацем ([Кац]', [H2]).]

Некоторые геометрические приложения этих результатов были даны в последующей работе Грэя [Gr]. Он приводит полную классификацию всех односвязных псевдоримановых "3-симметрических пространств" (в нашей терминологии – псевдоримановых регулярных s -многообразий порядка 3), для которых группа $\text{Aut}(M) \cap I(M)$ всех изометрических автоморфизмов является редуктивной группой Ли. В сущности это даёт классификацию всех 3-симметрических псевдоримановых пространств полупростого типа.

Особый упор делается на изучение инвариантных почти-комплексных и почти-эрмитовых структур на соответствующих регулярных s -многообразиях (в смысле III.46, III.47, III.49), в част-

ности на изучение почти-кэлеровых структур. (Почти-кэлерова структура характеризуется тождеством $(\nabla_X J)(X) = 0$ для всех векторных полей X , где ∇ обозначает псевдориманову связность.) Доказывается следующее: каждое псевдометризуемое регулярное s -многообразие порядка 3 "полупростого типа" может быть наделено такой псевдоримановой метрикой g , что соответствующая инвариантная почти-эрмитова структура J почти-кэлерова. Если многообразие неразложимо, то такая метрика единственна с точностью до скалярного множителя. Обратно, если M - аналитическое псевдориманово многообразие с почти-кэлеровой структурой J , удовлетворяющее дополнительному условию $(\nabla_X R)(X, JX, X, JX) = 0$ ³⁵, то M может быть превращено в (псевдориманово) локально-регулярное s -многообразие порядка 3, для которого комплексная структура J инвариантна относительно симметрий. В частности, M локально-3-симметрично.

Используя методы работы [WoG], А.С. Феденко классифицировал все однородные регулярные s -многообразия $(G, H, \mathfrak{g})$, у которых G - простая группа Ли (классического или особого типа), а $\mathfrak{g}$ - периодический автоморфизм ($[\text{Фез}]'$).

Используя тот же метод, Леджер и Петтит [LP1] классифицировали все компактные "квадратичные" s -многообразия. (Квадратичное s -многообразие - это, по определению, метризуемое регулярное s -многообразие $(M, \{s_x\})$, для которого тензорное поле симметрий S имеет квадратичный минимальный многочлен, или, эквивалентно, для которого S имеет точно два различных собственных числа, являющихся комплексно-сопряженными.)

В работе [LP2] те же авторы дают пример 3-симметрического риманова пространства, не гомеоморфного никакому обычному симметрическому пространству. Соответствующим низлежащим многообразием служит $M = SU(3)/T^2$, где T^2 - максимальный тор в $SU(3)$.³⁶

В классификационном списке Грэя, равно как и в других классификационных результатах, упомянутых в этом добавлении, пространства разрешимого или "смешанного" типа не появляются. Для сравнения стоит, пожалуй, рассмотреть ситуацию, имеющую место в теории псевдоримановых симметрических пространств. Полная классификация таких пространств полупростого типа может быть извлечена из работы Берже [В]. Существование псевдоримановых симметрических пространств разрешимого типа было отмечено уже Э. Картаном [Ка]'. В последнее время М. Кахену, М. Паркеру и Н. Уоллэчу удалось продвинуться вперед в соответствующих классификационных проблемах. Полная классификация известна сейчас для пространств сигнатуры $(n, 1)$, т.е. для лоренцевых многообразий

([CW]). Для пространств сигнатуры $(n, 2)$ с разрешимой группой трансвекций полная классификация дана в [CP1]. (Структура пространств смешанного типа тоже описывается удовлетворительным образом.) Наконец, полная классификация неразложимых псевдоримановых симметрических пространств смешанного типа (и произвольной сигнатуры) известна для размерностей $n < 8$ ([CP2]).

ДОБАВЛЕНИЕ 6. НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ *)

Следуя Ферузу [Fe]⁺, определим (внешнее) симметрическое подмногообразие M эвклидова пространства E^N как такое подмногообразие $M \subset E^N$ с индуцированной римановой метрикой, что для каждой точки $x \in M$ отражение E^N относительно нормального пространства к M в точке x индуцирует обычную симметрию риманова многообразия M . Или, эквивалентно, требуется, чтобы для каждой точки $x \in M$ существовала эвклидова изометрия i_x пространства E^N , такая что

$$(i) \quad (i_x)^2 = id;$$

$$(ii) \quad i_x(M) \subset M;$$

$$(iii) \quad x \text{ есть изолированная неподвижная точка отображения } i_x|_M;$$

(iv) все векторы, нормальные к M в точке x , неподвижны при действии i_x .

Феруз доказал, что все неприводимые симметрические подмногообразия эвклидовых пространств суть не что иное, как так называемые стандартно вложенные симметрические K -пространства (которые ранее были описаны Ш. Кобаяси). Из известной классификации симметрических K -пространств можно усмотреть следующее: все неприводимые римановы симметрические пространства, которые могут быть изометрически вложены в эвклидово пространство в качестве симметрических подмногообразий, являются римановыми симметрическими пространствами компактного типа (кроме некоторых исключительных пространств). Йорге [Jo]⁺ дал простое доказательство того факта, что неприводимые римановы симметрические пространства некомпактного типа нельзя вложить в E^N в качестве внешнего симметрического подмногообразия.

Кулих [Kl] изучил более общий случай обобщённых симметрических подмногообразий эвклидова пространства. В этом обобщении не требуется выполнения условий (i) и (iv), однако "условие вне-

*) Добавлено автором для русского издания.

шней регулярности" по-прежнему предполагается справедливым. Кулих доказал, что любое компактное обобщённое симметрическое риманово пространство можно вложить в E^N как обобщённое симметрическое подмногообразие. (Из теоремы 0.24 следует существование обобщённых симметрических подмногообразий любого конечного порядка.) Он дал явное описание для вложения 5-мерного обобщённого симметрического пространства типа 6a (гл. VI) как внешнего 4-симметрического подмногообразия в E^{14} ; этот пример показывает, почему надо было снять условие (iv) и разрешить нормальному расслоению подмногообразия M двигаться под действием обобщённых внешних симметрий. Кулих показал также, что большинство некомпактных пространств из классификационного списка гл. VI не может быть вложено в эвклидово пространство вышеуказанным образом; рассуждения здесь аналогичны рассуждениям Йорге.

Тварожек [Tv] исследовал слияния однородных римановых многообразий. Легко видеть, что каждое однородное риманово многообразие есть аффинное редуктивное пространство (нужно использовать некоторое редуктивное разложение и соответствующую каноническую связность). Данная в гл. VI конструкция слияния немедленно прилагается к аффинным редуктивным пространствам и, тем самым к однородным римановым многообразиям. Главные результаты Тварожека таковы:

1) Пусть (M_i, g_i) , $i = 1, 2$, — односвязные неприводимые римановы многообразия. Если существует слияние (M, g) многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2) , то (M, g) неприводимо (в смысле разложения де Рама).

Нагляднее этот результат можно пояснить так. Образует прямое произведение двух односвязных неприводимых однородных римановых пространств. Если (как это часто бывает) размерность произведения можно "понизить" за счёт некоторого слияния, то в результате получается неприводимое однородное риманово пространство.

2) Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной метрикой, не совпадающая со своим коммутантом. Тогда (G, g) допускает по крайней мере одно (нетривиальное) самослияние и, следовательно, порождает ряд римановых групповых пространств возрастающих размерностей.

3) Два неприводимых римановых симметрических (в смысле Э. Картана) пространства никогда не допускают слияния.

4) Для большинства пространств из классификационного списка гл. VI дан явный перечень самослияний.

Весьма вероятно, что операция слияния тесно связана со структурой разрешимых и нильпотентных групп Ли, и дальнейшие исследования в этом направлении выглядят многообещающими.

Я. Черни (см. $[C]^+$ и $[CK]^+$) классифицировал все односвязные обобщённые симметрические псевдоримановы пространства размерности $n \leq 4$, не являющиеся локально-симметрическими. В размерности 3 получается лишь формальная модификация риманова случая (см. теорему VI.2). В размерности 4 мы снова получаем формальную модификацию риманова случая (см. теорему VI.3) и еще три других класса пространств:

класс пространств порядка 3 и сигнатуры (2, 2) с некомпактной подгруппой изотропии;

класс лоренцевых многообразий порядка 4;

класс пространств бесконечного порядка и сигнатуры (2, 2).

Венгжиновский $[W3]$ построил новые примеры "несвязных" регулярных s -многообразий (см. гл. IV); эти примеры непосредственно приводят к определенным топологическим классификационным задачам. Проблема классификации здесь всё ещё остается открытой.

Тот же автор в $[W4]$ дал прямое доказательство того факта, что не существует непараллельных регулярных s -структур на E^3 и E^4 , и классифицировал все непараллельные s -структуры на E^5 (см. добавление 3). Предложенный метод классификации является новым.

Результаты Курциуса $[Ku]^+$ получили недавно неожиданное применение. Была найдена связь между некоторыми 6-мерными обобщёнными симметрическими римановыми пространствами и так называемыми "обобщёнными гейзенберговыми группами", изучавшимися Э. Капланом и другими авторами (см. $[TV]^+$).

Леджер и Разави (см. $[L3]$ и $[LR]$) развили теорию Σ -пространств. Грубо говоря, Σ -пространство — это многообразие с группой "симметрий" в каждой точке; все такие группы канонически изоморфны некоторой фиксированной группе Ли Σ (необязательно связной). Кроме того, для любого элемента $\zeta \in \Sigma$ семейство соответствующих симметрий во всех точках $x \in M$ должно удовлетворять обычному условию регулярности. Вообще говоря, предполагается лишь, что симметрия в любой точке $x \in M$ есть диффеоморфизм с неподвижной точкой x (необязательно изолированной). Это определение обобщает введённое О. Лоозом понятие пространства с отражениями.

Наибольший интерес представляют приведённые Σ -пространства. Они получаются, если потребовать, чтобы в каждой точке

$x \in M$ группа симметрий вся в целом не допускала нетривиальных неподвижных векторов в касательном пространстве. Регулярные s -многообразия - это, в сущности, приведённые Σ -пространства, у которых Σ - группа с одной образующей.

Новым в теории Леджера и Разави является изучение случая, когда Σ есть компактная группа Ли. Значительная часть теории, изложенной в гл. II, может быть обобщена на приведённые Σ -пространства с компактной группой Σ (равно как и большая часть локальной теории). Отметим особо результат о существовании здесь канонической связности. Все эти идеи, как нам кажется, содержатся в зачатке в предшествующих работах Лооза, главным образом в [Lo2].

Пока здесь известно мало конкретных примеров, а проблема классификации вообще не затрагивалась. Для начала представляется интересной следующая задача: найти примеры римановых многообразий, которые не являются обобщёнными симметрическими в нашем смысле, но всё же допускают структуру приведённого Σ -пространства для некоторой группы Ли Σ (при этом, естественно, "симметрии" должны быть изометриями).

Представляет интерес диссертация Туманяна [To]⁺ (выполненная под руководством А. Дэйке, крупного специалиста в этой области, который, однако, никогда не публиковал собственных результатов в данном направлении). В ней введены некоторые новые операции над s -многообразиями, а именно операции продолжения регулярной s -структуры с (псевдориманова) многообразия на

- (а) его касательное расслоение при помощи полного поднятия,
- (б) его кокасательное расслоение при помощи риманова продолжения.

Заметим, что техника продолжений для общего случая была развита в целом ряде работ К. Яно и других авторов. Продолжения классических симметрических структур также изучались ранее.

Было бы интересно рассмотреть операции продолжения s -структур в их связи с другими операциями с s -многообразиями, описанными в гл. IV. Здесь опять известно очень мало конкретных примеров. Пожалуй, хорошей задачей для начала была бы следующая: явно описать римановы продолжения каких-нибудь обобщённых симметрических римановых пространств из гл. VI и аналогичных псевдоримановых пространств из работы [СК].

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А. КРАТКИЙ ОЧЕРК ТЕОРИИ СВЯЗНОСТЕЙ

Напомним вкратце некоторые хорошо известные понятия и формулы теории связностей (см. [КН1]'). Ниже "дифференцируемый" всегда означает "класса C^∞ ".

Пусть M - дифференцируемое многообразие, G - группа Ли, а $P(M, G)$ - некоторое главное расслоение над M , так что G действует на P свободно справа, и это действие однотранзитивно на каждом слое из P .

Для $u \in P$ пусть G_u обозначает подпространство в $T_u(P)$, состоящее из всех векторов, касательных к слою, проходящему через u . Связность Γ в расслоении $P(M, G)$ - это сопоставление каждой точке $u \in P$ подпространства Q_u в $T_u(P)$, такого что

- (a) $T_u(P) = G_u \dot{+} Q_u$ (прямая сумма векторных пространств);
- (b) $Q_u \alpha = (R_\alpha)_* Q_u$ для любых $u \in P$ и $\alpha \in G$, где R_α - преобразование многообразия P , индуцированное элементом $\alpha \in G$: $R_\alpha u \stackrel{\text{def}}{=} u\alpha$;
- (c) Q_u дифференцируемо зависит от u .

G_u называется вертикальным подпространством в $T_u(P)$, а Q_u - горизонтальным подпространством в $T_u(P)$ относительно связности Γ . Каждый касательный вектор $X \in T_u(P)$ может быть однозначно представлен в виде $X = Y + Z$, где $Y \in G_u$, а $Z \in Q_u$.

Пусть α - векторнозначная дифференциальная k -форма на $P(M, G)$. Внешний ковариантный дифференциал $D\alpha$ (относительно Γ) определяется формулой

$$(D\alpha)(X_1, \dots, X_{k+1}) = (d\alpha)(hX_1, \dots, hX_{k+1}),$$

где hX_i - горизонтальная компонента поля X_i .

При заданной связности Γ в расслоении P мы определяем 1-форму ω на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G так: для каждого $X \in T_u(P)$ берём вертикальную компоненту Y вектора X и полагаем $\omega(X)$ равным тому единственному элементу Δ

алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которого

$$(d(u \cdot \exp tA)/dt)_{t=0} = Y.$$

Ясно, что $\omega(X)=0$, если и только если вектор X горизонтален. Форма ω называется формой связности для данной связности Γ .

Важным примером главного расслоения над многообразием M служит множество всех его линейных реперов (базисов касательных пространств). Это расслоение $L(M, GL(n, \mathbb{R}))$ называется главным расслоением реперов многообразия M .

Аффинная связность на M — это билинейное отображение

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

($\mathfrak{X}(M)$ — множество всех дифференцируемых векторных полей на M), записываемое в виде $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla_{fX} Y &= f(\nabla_X Y), \\ (ii) \quad \nabla_X fY &= (Xf)Y + f(\nabla_X Y), \end{aligned} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{F}(M)$$

($\mathcal{F}(M)$ — множество всех дифференцируемых функций на M). Как хорошо известно, для данной точки $p \in M$ значение $(\nabla_X Y)_p$ зависит лишь от значения X_p поля X в этой точке и от ростка поля Y в ней. Так что для любого вектора $v \in T_p(M)$ и любого локального векторного поля Y в окрестности точки p мы можем определить вектор $\nabla_v Y \in T_p(M)$. Этот вектор называется ковариантной производной поля Y относительно вектора v (в направлении вектора v).

Существует объективное соответствие между связностями в главном расслоении реперов $L(M) = L(M, GL(n, \mathbb{R}))$ и аффинными связностями на M . Поэтому мы часто отождествляем соответствующие объекты.

Пусть теперь $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ — подгруппа Ли, а $P(M, G) \subset L(M, GL(n, \mathbb{R}))$ — главное подрасслоение, т.е. G — структура на M . Каждая связность в $P(M, G)$ может быть единственным образом продолжена до связности в $L(M)$.

Пусть Γ — связность в P , ω — её форма связности и $\Omega = D\omega$ — внешний ковариантный дифференциал от ω ; он называется формой кривизны (для) связности Γ . Справедливо первое структурное уравнение

$$\begin{aligned} (A1) \quad d\omega(X, Y) &= -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y), \\ X, Y &\in T_u(P), \quad u \in P \end{aligned}$$

(со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$).

Далее, напомним, что каноническая форма θ расслоения P (не зависящая от Γ) есть $\mathbb{R}^n$ -значная 1-форма на P , определяемая формулой

$$\theta(X) = u^{-1} \cdot \pi_*(X), \quad u \in P, \quad X \in T_u(P).$$

Здесь $\pi: P \rightarrow M$ — проекция расслоения, а каждое $u \in P$ рассматривается как отображение пространства $\mathbb{R}^n$ на $T_{\pi(u)}(M)$. Формой кручения Θ (для) связности Γ на расслоения P называется внешний ковариантный дифференциал $D\theta$ формы θ относительно Γ . Форма Θ однозначно определяется из второго структурного уравнения

$$(A2) \quad d\theta(X, Y) = -\frac{1}{2} [\omega(X) \cdot \theta(Y) - \omega(Y) \cdot \theta(X)] + \Theta(X, Y), \\ XY \in T_u(P), \quad u \in P$$

(со значениями в $\mathbb{R}^n$).

Рассмотрим тензорные поля кручения и кривизны соответствующей аффинной связности на M :

$$(A3) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

$$(A4) \quad R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z.$$

Тензоры T и R выражаются через Θ и Ω соответственно по следующим формулам:

$$(A5) \quad T(X, Y) = u(2\Theta(\tilde{X}, \tilde{Y})), \quad X, Y \in T_x(M),$$

$$(A6) \quad R(X, Y)Z = u(2\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})(u^{-1}Z)), \quad X, Y, Z \in T_x(M);$$

здесь u — любой элемент из P , удовлетворяющий условию $\pi(u) = x$, а $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_u(P)$ — произвольные поднятия полей X и Y соответственно.

Замечание. Рассматривая $u \cdot (2\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}))$ как "особый репер" в точке x , мы можем также написать вместо (A6)

$$(A7) \quad R(X, Y)Z = u \cdot (2\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}))(u^{-1}Z).$$

Для тензорных полей кручения и кривизны T, R аффинной связности ∇ на M имеют место хорошо известные тождества Бьянки

$$(A8) \quad \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) = \mathfrak{S}\{T(T(X, Y), Z) + (\nabla_X T)(Y, Z)\},$$

$$(A9) \quad \in \{ (\nabla_Z R)(X, Y) + R(T(X, Y), Z) \} = 0$$

(где $\in$ обозначает циклическую сумму по X, Y, Z).

Из теории связностей известен следующий результат. Пусть Γ — связность в $L(M)$, ∇ — соответствующая аффинная связность на многообразии M , а $f: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм. Связность Γ инвариантна относительно индуцированного автоморфизма $\tilde{f}: L(M) \rightarrow L(M)$ расслоения реперов, если и только если ∇ инвариантна относительно f в том смысле, что

$$(A10) \quad f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*X} f_*Y \quad \text{для любых } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Диффеоморфизм f называется в таком случае аффинным преобразованием аффинного многообразия (M, ∇) .

Более общо, если $(M, \nabla), (M', \nabla')$ — два многообразия с аффинными связностями, то диффеоморфизм $f: M \rightarrow M'$ называется аффинным отображением, если равенство (A10) справедливо после замены ∇ на ∇' в его правой части.

Пусть Γ — фиксированная связность в $L(M)$, а $I \subset \mathbb{R}$ — произвольный интервал. Дифференцируемая кривая $\alpha: I \rightarrow L(M)$ называется горизонтальной, если все касательные векторы $(d\alpha/dt)$ горизонтальны относительно Γ . Для любой дифференцируемой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и любой пары (t_0, u_0) с $t_0 \in I, u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ существует единственная горизонтальная кривая $\tilde{\gamma}: I \rightarrow L(M)$, такая что $\tilde{\gamma} = \pi \circ \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}(t_0) = u_0$. Если $I = [a, b]$ — замкнутый конечный интервал, то мы можем сопоставить таким способом любому реперу $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(a))$ некоторый однозначно определённый репер $u_1 \in \pi^{-1}(\gamma(b))$. Тем самым мы получаем изоморфизм $h_\gamma: T_{\gamma(a)}(M) \rightarrow T_{\gamma(b)}(M)$, который не зависит от выбора $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(a))$ и называется параллельным переносом вдоль γ .

Дифференцируемое отображение $v: I \rightarrow T(M)$ называется векторным полем вдоль кривой $\gamma: I \rightarrow M$, если $v(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$ для каждого $t \in I$. Говорят, что такое векторное поле параллельно, если для любого подынтервала $[t_1, t_2] \subset I$ вектор $v(t_2)$ есть результат параллельного переноса вектора $v(t_1)$ вдоль дуги $\gamma|_{[t_1, t_2]}$.

Кривая $\gamma: I \rightarrow M$ называется геодезической, если её касательное векторное поле $v(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}$ (вдоль γ) параллельно. Хорошо известно, что для каждой точки $p \in M$ и каждого касательного вектора $X \in T_p(M)$ существует единственная максимальная геодезическая $\gamma_X: I \rightarrow M$ ($I \ni 0$) со свойствами $\gamma_X(0) = p, (d\gamma_X(0)/dt) = X$.

Говорят, что аффинная связность ∇ , соответствующая Γ , полна, если каждая из максимальных геодезических $\gamma_X, X \in T(M)$, определена на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ — регулярная дифференцируемая кривая. Тогда условие параллельности вдоль γ можно выразить в терминах аффинной связности ∇ следующим образом: векторное поле $v(t)$ вдоль γ параллельно, если и только если

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(v(t)) = 0 \quad \text{для всех } t \in I.$$

Здесь $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} v(t)$ однозначно определяется для каждого $t \in I$ как ковариантная производная $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} W$, где W — произвольное (дифференцируемое) локальное векторное поле в окрестности $\gamma(t)$, такое что $v(\tau) = W_{\gamma(\tau)}$ для всех τ , достаточно близких к t .

Для каждого дифференцируемого векторного поля X на M мы определили оператор $\nabla_X: Y \rightarrow \nabla_X Y$ на векторных полях из $\mathfrak{X}(M)$. Имеется единственное продолжение этого оператора на алгебру $\mathfrak{T}(M)$ всех дифференцируемых тензорных полей на M , удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) ∇_X есть дифференцирование алгебры $\mathfrak{T}(M)$ относительно тензорного произведения;
- (ii) ∇_X сохраняет тип любого тензорного поля;
- (iii) ∇_X перестановочно со свёртываниями;
- (iv) $\nabla_X Y$ имеет обычный смысл для любого векторного поля Y , и $\nabla_X f = Xf$ для любой дифференцируемой функции f .

Пусть (M, ∇) — многообразие с аффинной связностью. Для любой точки $p \in M$ существует окрестность N_0 нулевого вектора из $T_p(M)$, такая что геодезические γ_X определены при $t = 1$ для всех $X \in N_0$. Определим экспоненциальное отображение $\text{Exp}_p: N_0 \rightarrow M$ формулой

$$\text{Exp}_p(X) = \gamma_X(1), \quad X \in N_0.$$

Образ $\text{Exp}_p(N_0) = N_p$ называется нормальной окрестностью точки p , если отображение Exp_p есть диффеоморфизм N_0 на N_p . Для каждой точки $p \in M$ всегда существует нормальная окрестность.

Нормальные координаты в данной нормальной окрестности определяются отображением

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \text{Exp}_p(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n),$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в $T_p(M)$.

Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — замкнутая кусочно-дифференцируемая кривая, так что $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Мы можем определить параллельный перенос вдоль всей кривой γ , используя параллельный перенос вдоль её дифференцируемых кусков. Все преобразования $h_\gamma: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$, получающиеся таким путём, образуют группу Ли $\Psi(p)$, называемую группой голономии многообразия M с опорной точкой p . Если M связно, то все группы голономии $\Psi(x)$, $x \in M$, изоморфны. Выбрав какой-нибудь репер u_0 в точке $p \in M$, мы можем определить группу голономии $\Phi(u_0) \subset GL(n, \mathbb{R})$ с опорным репером u_0 ; здесь $\Phi(u_0) \simeq \Psi(p)$. Любые две группы голономии $\Phi(u_0), \Phi(u_1)$ ($u_0, u_1 \in L(M)$), сопряжены друг другу в группе $GL(n, \mathbb{R})$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Подробное изложение приводимых ниже результатов можно найти, например, в [КН1]’.

Аффинные отображения, изометрии, голономия

В1. Пусть M, M' — многообразия с аффинными связностями (соотв. римановы многообразия) и f, g — аффинные отображения (соотв. изометрии) многообразия M в многообразии M' . Если M связно и $(f_*)_x = (g_*)_x$ для некоторой точки $x \in M$, то f и g совпадают на M .

В2. Пусть M — связное односвязное аналитическое многообразие с аналитической аффинной связностью, а M' — аналитическое многообразие с полной аналитической аффинной связностью. Тогда каждое аффинное отображение f_U связного открытого подмножества $U \subset M$ в M' может быть единственным образом продолжено до аффинного отображения f всего многообразия M в M' .

В3. Пусть M и M' — аналитические римановы многообразия. Если M связно и односвязно, а M' полно, то любое изометрическое погружение f_U связного открытого подмножества $U \subset M$ в M' может быть единственным образом продолжено до изометрического погружения f всего M в M' .

В4. Пусть M и M' — связные односвязные полные аналитические римановы многообразия. Тогда каждая изометрия между связными открытыми подмножествами в M и M' может быть однозначно продолжена до изометрии между M и M' .

В5. Пусть M – связное дифференцируемое многообразие с аффинной связностью и $\Psi(x)$ – его группа голономии с точкой отсчета x . Алгебра Ли $\mathfrak{g}(x)$ группы $\Psi(x)$ совпадает с подпространством в $\text{End}(T_x(M))$, порожденным всеми эндоморфизмами вида

$$(\tau R)(X, Y) = \tau^{-1} \circ R(\tau X, \tau Y) \circ \tau,$$

где $X, Y \in T_x(M)$, а τ – параллельный перенос вдоль произвольной кусочно-дифференцируемой кривой, исходящей из x .

Аффинные многообразия с параллельными тензорами кривизны и кручения

В6. Пусть M – дифференцируемое многообразие с аффинной связностью, такое что $\nabla T = 0$, $\nabla R = 0$. Относительно любых атласов, состоящих из нормальных координатных систем, M является аналитическим многообразием с аналитической связностью ∇ .

В7. Пусть M и M' – дифференцируемые многообразия с аффинными связностями ∇ и ∇' соответственно. Допустим, что $\nabla T = 0$, $\nabla R = 0$, $\nabla' T' = 0$, $\nabla' R' = 0$. Для всякого линейного изоморфизма F пространства $T_{x_0}(M)$ на $T_{y_0}(M')$, который переводит тензоры T_{x_0} и R_{x_0} в точке x_0 соответственно в тензоры T'_{y_0} и R'_{y_0} в точке y_0 , существует аффинный изоморфизм f нормальной окрестности U_{x_0} на нормальную окрестность V_{y_0} , такой что $f(x_0) = y_0$ и $f_* x_0 = F$. А именно, можно взять

$$f = \text{Exp}_{y_0} \circ F \circ \text{Exp}_{x_0}^{-1}.$$

В8. Пусть многообразия M и M' из В7 связны, односвязны и полны. Тогда существует единственный аффинный изоморфизм f многообразия M на M' , такой что $f(x_0) = y_0$, а дифференциал от f в точке x_0 совпадает с F .

В9. Пусть M – дифференцируемое многообразие с аффинной связностью, такое что $\nabla T = 0$, $\nabla R = 0$. Тогда для каждой точки $x \in M$ алгебра Ли $\mathfrak{g}(x)$ группы голономии $\Psi(x)$ порождается всеми эндоморфизмами вида $R(X, Y)$, $X, Y \in T_x(M)$.

Замечание. Теорема В9 немедленно следует из теоремы В5 и того факта, что $\tau R = R$.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

1) Терминология здесь не совсем удачная, ибо когда говорят о симметрическом пространстве, то обычно имеют в виду не симметрии в смысле автора, а симметрии в смысле Э.Картана, т.е. инволютивные (или геодезические) симметрии (такие s_x , что $s_x^2 = id$). Быть может, следовало бы сохранить термин "симметрия" за симметриями в смысле Э.Картана, а симметрии в смысле автора называть обобщенными симметриями (или симметриями Леджера). Однако используемая автором терминология уже укоренилась, и с этим приходится считаться.

Полезно, во избежание недоразумений, отметить, что существует ещё понятие субсимметрии риманова пространства в точке x (изометрическое отображение s_x , такое что $s_x x = x$, $s_x^2 = id$; здесь не требуется, чтобы точка x была изолированной неподвижной точкой отображения s_x , так что возникает, вообще говоря, целое множество неподвижных точек субсимметрии s_x , так называемое "зеркало"). Понятие субсимметрии естественным образом переносится на пространства аффинной связности и на однородные пространства. Относительно теории субсимметрических пространств см. [Ca1]', [Ca2]', [Ca3]' и обзор [BeФ]'.

2) Задание s -структуры на римановом многообразии (M, g) означает задание на M структуры левой квазигруппы, т.е. бинарной операции $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} s_x y$ левым делением (уравнение $a \cdot x = b$ однозначно разрешимо, $x = a \setminus b$). При этом $x \cdot x = x$ (идемпотентность $Id.P.$). В симметрическом пространстве дополнительно имеем $x \cdot (x \cdot y) = y$ (левое свойство обратимости, $L.I.P.$). Свойство регулярности имеет вид $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$ (левое свойство дистрибутивности, $L.D.P.$). Так что регулярная s -структура на M — это левая квазигруппа, идемпотентная и леводистрибутивная. Этот естественный алгебраический подход автором в данном трактате не используется.

Относительно необходимых алгебраических понятий см. [Be]'.

3) Таким образом, квазигруппа $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} s_x y$ на M (см. примечание 2)) оказывается аналитической.

4) Термин автора не совсем удачен, при $k = 3$ есть опасность путаницы. А именно, 3-симметрические пространства не следует путать с введенными гораздо раньше трисимметрическими пространствами (см. [Ca4]' и [BeΦ]'). Впрочем, последние в этой книге не встречаются.

5) Стоит предупредить читателя, что буква q используется здесь в двух различных смыслах (метрика и элемент группы).

6) Любопытно, что при $k = 2$ эта конструкция появилась (и гораздо раньше!) в теории трисимметрических пространств (см. [Ca4]').

7) Эта связность впервые введена П.К. Рашевским, и её по справедливости следует называть связностью Рашевского (см. [P1]', [P2]').

8) Этот факт впервые установлен П.К. Рашевским (см. [P2]').

9) Здесь фактически речь идёт о структуре так называемой тройной алгебры Ли на $V = M_0$. Мы имеем две операции

$$X \cdot Y \stackrel{\text{def}}{=} T(X, Y) \quad \text{и} \quad \langle X, Y, Z \rangle \stackrel{\text{def}}{=} R(X, Y; Z)$$

(бинарную и тернарную) с системой тождеств (a) – (d). Это и есть тройная алгебра Ли. При $T = 0$ получаем, в частности, хорошо известную тройную систему Ли. См., например, [Ca6]' или [Ki]'.

10) Здесь $\mathcal{L}$ – алгебра Ли группы L .

11) Точнее, леводистрибутивный группоид (т.е. выполнено тождество $x \cdot (\dot{y} \cdot \dot{z}) = (x \cdot \dot{y}) \cdot (x \cdot \dot{z})$). На самом деле получается не только группоид, но и левая квазигруппа, т.е. уравнение $a \cdot x = b$ всегда однозначно разрешимо (так как отображение s_x обратимо) и можно ввести операцию левого деления $x = a \setminus b$.

12) Итак, симметрическое пространство в смысле Лооза – это многообразие M с дифференцируемой структурой левой квазигруппы $\langle M, \cdot \rangle$, тождествами

- (1) $x \cdot x = x$ (идемпотентность, Id.P.),
 (2) $x \cdot (x \cdot y) = y$ (левая обратимость, L.I.P.),
 (3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$ (левая дистрибутивность, L.D.P.)

и дополнительным условием $x \cdot y = y \Rightarrow y = x$ в некоторой окрестности точки x . (Стандартное условие левой обратимости в теории квазигрупп имеет чуть более общий вид $\varphi(x) \cdot (x \cdot y) = y$, $\varphi: M \rightarrow M$.)

13) На языке квазигрупп всё это означает, что задано дифференцируемое многообразие M , на котором определена структура идемпотентной леводистрибутивной левой квазигруппы $\mathcal{M} = \langle M, \cdot, \backslash \rangle$, операции которой ($\cdot$ и $\backslash$) дифференцируемы (условия (1), (2'), (3)). Условие (4') тоже допускает переформулировку в терминах квазигрупп. А именно, оно означает, что локально существует дифференцируемое правое деление, т.е. уравнение $x \cdot a = b$ имеет (локально) единственное решение $x = b/a$ и $r_a: x \rightarrow x \cdot a$ — локальный диффеоморфизм окрестностей точки a (см. [Ca6]', [C61]'). Таким образом, $\langle M, \cdot, \backslash, / \rangle$ — локальная дифференцируемая квазигруппа.

Всё это показывает, что данная структура относится (наподобие, скажем, групп Ли) к алгебре в той же мере (на первый взгляд даже в большей мере), что и к геометрии.

14) Употребляемая автором запись $x^{-1} \cdot y$ не совсем удачна, так как может навести на ложную мысль о существовании какого-то обратного элемента в квазигруппе (M, μ) . Корректно, с точки зрения теории квазигрупп, писать в этом случае $x \backslash y$, поскольку речь идёт о результате деления y на x слева.

15) Способ, которым автор получает теорему II.17, достаточно формален и не нагляден. Ситуацию можно прояснить, заметив, что на самом деле автор работает с лупами (по одной в каждой точке), изотопными квазигруппе (M, μ) . Эти лупы оказываются специальными (см. [Be]'). Пучок луп, "касательных" к такой системе луп, и определяет нужную связность. (См. [Ca6]', теор. 3.1).

16) Независимо (и несколько раньше) локальная теория была развита в [C61]' (см. также [Ca6]') на более алгебраическом языке. Такой подход имеет несомненные преимущества. Указанные работы автору, видимо, неизвестны. С другой стороны, изложение им этих вопросов отличается полнотой и обстоятельностью.

17) Автор употребляет здесь несколько архаичный язык, примерно такой, какой существовал до Г. Вейля в теории алгебр Ли (их

называли инфинитезимальными группами Ли). Здесь следует говорить о тройной алгебре Ли (см. примечание ⁹⁾), снабжённой дополнительной унарной операцией S_o ($S_o: x \mapsto S_o x$) и удовлетворяющей системе тождеств $(i) - (vi)$.

18) Здесь автор опять пользуется несколько архаичным способом изложения. Следовало бы ввести соответствующие категории S -многообразий и тройных алгебр Ли и говорить об их эквивалентности. Впрочем, здесь такой способ изложения имеет и свои положительные стороны, освобождая читателя от необходимости знать язык категорий.

19) В оригинале ошибочно стоит $[m, m] \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

20) В этой теореме следовало бы говорить, пользуясь современным языком, об эквивалентности соответствующих категорий.

21) Здесь через (U_1, U_2) автор обозначает подпространство, порождённое векторами U_1 и U_2 (т.е. их линейную оболочку).

22) Если перевести несколько архаичный язык автора на современный алгебраический, то здесь речь идёт о подалгебре некоторой тройной алгебры Ли (подалгебре в смысле теории универсальных алгебр).

23) Здесь, как и в примечании ²¹⁾, символ (X, Y) обозначает линейную оболочку векторов X и Y .

24) Через (W) здесь обозначено одномерное подпространство, порождённое вектором W .

25) Это — конструкция прямого произведения двух гладких левых квазигрупп (см. примечание ²⁾).

26) Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$, как известно, может рассматриваться как трёхмерное эвклидово пространство V_3 с обычным векторным умножением в качестве умножения. Тогда естественный базис, о котором говорит автор, — это ортонормированный базис эвклидова пространства. Так что $[X, Y] = Z, [Y, Z] = X, [Z, X] = Y$. Аналогичные равенства имеют место и для $X', Y', Z' \in V'_3$. Элементами из $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ являются формальные суммы вида $P + Q$, где $P \in V_3, Q \in V'_3$. Подалгебра $\mathfrak{h} = (X + X')$ — это подалгебра, порождённая элементом $X + X'$ ($X \in V_3, X' \in V'_3$).

27) В оригинале "amalgamation".

28) В оригинале "amalgamating".

29) Напомним еще раз, что 3-симметрические пространства не следует путать с трисимметрическими (см. $[Ca4]'$, $[Ca5]'$). Последние, впрочем, в этой книге не встречаются.

30) Рассуждения автора относятся именно к однородным многообразиям, хотя в оригинале об этом явно не сказано. Если же рассматривать произвольные римановы пространства, то условие отсутствия инфинитезимальных вращений следует формулировать как конечность подгруппы изотропии группы $I(M, g)$ в каждой точке.

31) См. примечание 30).

32) Декартовым комплексным (соотв. вещественным) пространством автор называет C^n (соотв. R^n).

33) Эти пространства впервые были обнаружены и исследованы в $[Ca2]'$, $[Ca3]'$ в связи с другим их замечательным свойством - субсимметричностью.

34) См. примечание 29).

35) Здесь под R понимается тензор Римана

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

36) Это 3-симметрическое пространство является также и трисимметрическим в смысле $[Ca4]'$. Весьма курьёзно, что случайная близость в терминологии отражает действительную связь соответствующих объектов. Эту связь (трисимметрических и 3-симметрических пространств) следовало бы детально изучить.

ЛИТЕРАТУРА *)

- [B] M. Berger. Les espaces symétriques non compacts. Ann.Sci. Ecole Norm.Sup. 74 (1957), 85-177.
- [Bo1] A. Borel. Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori. Bull.Amer.Math.Soc. 55 (1948), 580-586.
- [Bo2] A. Borel. Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes. C.R.Acad.Sci. Paris, 230 (1950), 1378-1380.
- [Bž1] M. Božek. Existence of generalized symmetric Riemannian spaces with solvable isometry group. Čas.Pěst.Mat.(Praha) 105 (1980), 368-384.
- [Bž2] M. Božek. Existence of generalized affine symmetric spaces of arbitrary order. Colloquium Math. (Warsaw) 47, to appear.
- [Bž3] M. Božek. Ph.D. Thesis, Praha, 1976.
- [CP1] M. Cahen, M. Parker. Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques. Bull.Soc.Math.Belg. 22 (1970), No 4, 339-354.
- [CP2] M. Cahen, M. Parker. Espaces pseudo-riemanniens symétriques. Preprint, Université Libre de Bruxelles.
- [CW] M. Cahen, N. Wallach. Lorentzian symmetric spaces. Bull. Am.Math.Soc. 76 (1970), 585-591.

*) для работ на русском языке в переводе использованы русские сокращения; во избежание путаницы с латинскими сокращениями они помечены штрихом (справа). Звёздочка (слева) помечает работы, добавленные переводчиком. В конце отдельным списком даны работы, добавленные автором для русского издания; они помечены плюсиком (справа). - Прим. ред.

- [GL1] P.J. Graham, A.J. Ledger. Sur une classe de s -variétés riemanniennes ou affines. C.R.Acad.Sci. Paris 267 (1967), 947-948.
- [GL2] P.J. Graham, A.J. Ledger. s -Regular Manifolds. Differential Geometry: in honour of Kentaro Yano, Tokyo 1972, 133-144.
- [Gr] A. Gray. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. J.Diff. Geometry 7 (1972), No 3-4, 343-369.
- [H] S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric spaces, Pure and Appl.Math., 1978. Academic Press, New York - San Francisco - London.
- [K1] O. Kowalski. Riemannian manifolds with general symmetries. Math. Z. 136 (1974), No 2, 137-150.
- [K2] O. Kowalski. Generalized symmetric spaces (Preliminary communication). Comm.Math.Univ. Carolinae, 15, 2 (1974), 361-375.
- [K3] O. Kowalski. Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leq 5$. Rozprawy ČSAV, Řada MPV, No 8, 85 (1975).
- [K4] O. Kowalski. Generalized pointwise symmetric spaces. Comm.Math.Univ. Carolinae, 16, 3 (1975), 459-467.
- [K5] O. Kowalski. Existence of generalized symmetric Riemannian spaces of arbitrary order. J.Diff. Geometry 12 (1977), No 2, 203-208.
- [K6] O. Kowalski. Generalized symmetric Riemannian spaces. Period.Math.Hung. 8 (2), (1977), 181-184.
- [K7] O. Kowalski. Smooth and affine s -manifolds. Period.Math.Hung. 8 (3-4), 1977, 299-311.
- [K8] O. Kowalski. Generalized affine symmetric spaces. Math. Nachr. 80 (1977), 205-208.
- [K9] O. Kowalski. On unitary automorphisms of solvable Lie algebras. Pacific J.Math. 82 (1979), No 1, 133-143.
- [K10] O. Kowalski. Affine reductive spaces. Beiträge zur Algebra und Geometrie 8 (1979), 99-105.
- [K11] O. Kowalski. Free periodic isometries of Riemannian manifolds. J.London Math.Soc. (2), 20 (1979), 334-338.

- [KL] O. Kowalski, A.J. Ledger. Regular s-structures on manifolds, Preprint, Liverpool 1972.
- *[Kw] M. Kikkawa. Geometry of homogeneous Lie loops. Hiroshima Math. J. 5 (1975), 141-179.
- [L1] A.J. Ledger. Espaces de Riemann symétriques généralisés. C.R.Acad.Sci. Paris 264 (1967), 947-948.
- [L2] A.J. Ledger. s-Manifolds. Chronik der 4.Panhellen. Math. Versammlung, Patras 1971, 91-93.
- [LO] A.J. Ledger, M. Obata. Affine and Riemannian s-manifolds. J.Differential Geometry 2 (1968), No 4, 451-459.
- [LP1] A.J. Ledger, B. Pettit. Compact quadratic s-manifolds. Comment.Math.Helv. 51 (1976), 105-131.
- [LP2] A.J. Ledger, B. Pettit. Classification of metrizable regular s-manifolds with integrable symmetry tensor field. J.Math.Soc. Japan 28 (1976), No 4, 668-675.
- [Lo1] O. Loos. Symmetric spaces, Vol. I: General Theory. Math. Lecture Note Series, W.A. Benjamin Inc., New York - Amsterdam 1969.
- [Lo2] O. Loos. An intrinsic characterization of fibre bundles associated with homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. Abh.Math.Sem.Univ. Hamburg 37 (1972), 160-179.
- [MS] D. Montgomery, H. Samelson. Transformation groups on spheres. Ann. of Math. 44 (1943), 454-470.
- [N] K. Nomizu. Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer.J.Math. 76 (1954), No 1, 33-65.
- [TL1] Gr.Tsagas, A.J. Ledger. Classification of simply connected four-dimensional RR-manifolds. Trans.Amer.Math.Soc. 219 (1976), 189-210.
- [TL2] Gr.Tsagas, A.J. Ledger. Riemannian s-manifolds. Preprint, Univ. of Patras, Univ. of Liverpool.
- [W1] S. Węgrzynowski. Representation of generalized affine symmetric spaces by s-structures. Demonstratio Math. 9 (1976), No 4, 1-21.
- [W2] S. Węgrzynowski. Classification of generalized affine symmetric spaces of dimension $n \leq 4$. Dissertationes Math. (Warsaw) (Rozprawy Matematyczne) 194 (1981), 77 pp.

- [Wi] D.J. Winter. On groups of automorphisms of Lie algebras. J.Alg. 8 (1968), 131-142.
- [WoG] J.A. Wolf, A. Gray. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. J.Diff. Geometry 2 (1968), No 1-2, 77-159.
- *[Be]' Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. - М.: Наука, 1967.
- *[Бл]' Бляшке (W. Blaschke) Введение в геометрию тканей. - М.: Физматгиз, 1959.
- [ВеФ]' Ведерников В.И., Феденко А.С. Симметрические пространства и их обобщения. Обзорная статья. - Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия. Т. 14. - М.: ВИНТИ, 1976.
- [Вол]' Вольф (J. A. Wolf) Пространства постоянной кривизны. - М.: Наука, 1982.
- [Дж]' Джекобсон (N. Jacobson) Алгебры Ли. - М.: Мир, 1964.
- [Кар]' Картан (E. Cartan) Об одном замечательном классе римановых пространств. - В кн.: Геометрия групп Ли и симметрические пространства. - М.: ИЛ, 1949, с. 112-149.
- [Кац]' Кац В.Г. Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли. - Функц. анализ и прил., 1969, 3, с. 94-96.
- [КН1]' Кобаяси, Номидзу (S. Kobayashi, K. Nomizu) Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. - М.: Наука, 1981.
- [КН2]'
- [Ли]' Теория Алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар "Софус Ли". - М.: ИЛ, 1962.
- *[М]' Мальцев А.И. Аналитические лупы. - Мат. сб., 1955, 36, № 3, с. 569-573.
- *[Р1]' Рашевский П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением. - Труды сем. по вект. и тенз. анализу, МГУ, 1950, № 8, с. 82-92.
- *[Р2]' Рашевский П.К. О геометрии однородных пространств. - Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 1952, № 9, с. 49-74.
- *[Са1]' Сабинин Л.В. О геометрии субсимметрических пространств. - Научн. докл. высш. школы, сер. физ-мат. наук, 1958, № 3, с. 46-49.
- *[Са2]' Сабинин Л.В. О структуре групп движений однородных римановых пространств с осевой симметрией. - Научн. докл. высш. школы, сер. физ-мат. наук, 1958, № 6, с. 127-138.
- *[Са3]' Сабинин Л.В. Зеркальные симметрии римановых пространств. - Канд. дисс., МГУ, 1959.
- *[Са4]' Сабинин Л.В. О геометрии трисимметрических римановых пространств. - Сиб. мат. ж., 1961, № 2, с. 266-278.

- *[Ca5]' Сабинин Л.В. Трисимметрические пространства с простыми компактными группами движений. – Труды сем. по вект. и тенз. анализу, МГУ, 1972, № 16, с. 202–226.
- *[Ca6]' Сабинин Л.В. Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. – Добавление к [КН1]'.
[КН1]'
- *[Ca7]' Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью. – ДАН СССР, 1977, 233, № 5, с. 800–803.
- *[Ca8]' Сабинин Л.В. О геометрии луп. – Мат. заметки, 1972, 12, № 5, с. 605–616.
- *[C61]' Сбитнева Л.В. Совершенные структуры. – В сб.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининградский ун-т, 1979, 10, с. 97–103.
- *[C62]' Сбитнева Л.В. Об алгебрах Ли совершенных s -пространств. – В сб.: Ткани и квазигруппы. – Калининский ун-т, 1982, с. 128–133.
- [Ст1]' Степанов Н.А. О редуктивности факторпространств, порождённых эндоморфизмами групп Ли. – Известия ВУЗов, сер. мат., 1967, № 2, с. 74–79.
- [Ст2]' Степанов Н.А. Основные факты теории φ -пространств. – Известия ВУЗов, сер. мат., 1967, № 3, с. 88–95.
- [Ст3]' Степанов Н.А. Однородные 3-циклические пространства. – Известия ВУЗов, сер. мат., 1967, № 12, с. 65–74.
- [Фе1]' Феденко А.С. Однородные φ -пространства и пространства с симметриями. – Вестник БГУ, Минск, сер. 1, 1972, № 2, с. 25–30.
- [Фе2]' Феденко А.С. Регулярные пространства с симметриями. – Мат. заметки, 1973, 14, № 1, 113–120.
- [Фе3]' Феденко А.С. Пространства с симметриями, Минск: изд-во БГУ, 1977.
- [Хе]' Хелгасон (S. Helgason) Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир, 1964.
- [Ше]' Шевалле (C. Chevalley) Теория групп Ли. Т. 1. – М.: ИЛ, 1948.

Литература, добавленная автором
для русского издания

- [AS]⁺ W. Ambrose, I.M. Singer. On homogeneous Riemannian manifolds, Duke Math. J. 25 (1958), 647–669.
- [C]⁺ J. Černý. Kand. diss., Praha, 1981.

- [CK]⁺ J. Černý, O. Kowalski. Classification of generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \leq 4$. Tensor, N.S. 38 (1982), 255-267.
- [Fe]⁺ D. Ferus. Symmetric submanifolds of Euclidean space, Math. Ann. 247 (1980), 81-93.
- [Jo]⁺ V. Jorge. Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 149-150.
- [Kl]⁺ I. Kulich. Generalized symmetric submanifolds of Euclidean spaces (Czech.). Kand. diss., Bratislava, 1981.
- [Ko]⁺ B. Kostant. Nagoya J. 16 (1960), 35-50.
- [Ku]⁺ E. Kurcius. Doct. Thesis, University of Katowice, 1978.
- [L]⁺ A.J. Ledger. Affine and Riemannian Σ -Spaces (book). Seminar on Mathematical Sciences, No 5 (1982), Keio University, Yokohama, Japan (118 pp.).
- [LR]⁺ A.J. Ledger, A.K. Razavi. Reduced Σ -spaces. Illinois J. Math. 26, No 2 (1982), 272-292.
- [Sa]⁺ T. Sato. Riemannian 3-symmetric spaces and homogeneous K-spaces. Memoirs of the Faculty of Technology, Kanazawa Univ., 12 (1979), No 2, 1-7.
- [Se1]⁺ K. Sekigawa. On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces, Tensor, N.S. 31 (1977), 87-97.
- [Se2]⁺ K. Sekigawa. Notes on some Riemannian locally 3-symmetric spaces. Tensor, N.S., 37 (1982), 29-34.
- [SeW]⁺ K. Sekigawa, J. Watanabe. On some compact Riemannian 3-symmetric spaces, to appear.
- [SeY]⁺ K. Sekigawa, H. Yoshida. Some Riemannian 3-symmetric spaces by outer automorphisms of compact Lie groups, to appear.
- [Si]⁺ I.M. Singer. Infinitesimally homogeneous spaces, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 685-697.
- [To]⁺ M. Toomanian. Riemann extensions and complete lifts of s-spaces. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1975 (113 pp.).
- [Tv]⁺ J. Tvarožek. Amalgamations of Riemann homogeneous spaces and generalized symmetric spaces (in Czech.). Kand. diss., Bratislava 1981.

- [TV1]⁺ F. Tricerri, L. Vanhecke. Homogeneous structures on Riemannian manifolds. Lecture Note Series, London Math. Soc., to appear.
- [TV2]⁺ F. Tricerri, L. Vanhecke. Naturally reductive homogeneous spaces and generalized Heisenberg groups. Composition Mathematica, to appear.
- [W1]⁺ S. Węgrzynowski. Disconnected regular s-manifolds. Comment. Math. Univ. Carolinae, Praha, 22 (1981), No 3, 537-547.
- [W2]⁺ S. Węgrzynowski. Parallel and non-parallel s-structures on Euclidean spaces. Czech. Math. J. 33 (1983), 76-94.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амброуз (W. Ambrose) 111
 Берже (M. Berger) 180, 207
 Божек (M. Božek) 34, 191
 Борель (A. Borel) 200
 Бриккелл (F. Brickell) 17, 203
 Брэдбери 6
 Ведерников В.И. 10
 Вейль (H. Weyl) 221
 Венгжиновский (S. Węgrzynowski) 181, 210
 Вольф (J.A. Wolf) 206
 Грэй (A. Gray) 12, 206, 207
 Грэйем <= Грэхем> (P.J. Graham) 40, 99
 Декарт 5
 Домбровский (P. Dombrowski) 12
 Дэйке (A.W. Deicke) 19, 211
 Йорге (V. Jorge) 208, 209
 Каплан (A. Kaplan) 210
 Картан (E. Cartan) 6, 10, 11, 110, 207, 209, 219
 Кахен (M. Cahen) 207
 Кац В.Г. 206
 Киккава (M. Kikkawa) 6
 Клейн 5
 Кобаяси (S. Kobayashi) 208
 Ковальский (O. Kowalski) 7, 8, 12
 Костант (B. Kostant) 111
 Кулих (I. Kulich) 208, 209
 Курциус (E. Kurcius) 179, 210
 Леджер (A.J. Ledger) 6, 10, 28, 40, 64, 70, 99, 110, 119, 207, 210, 219
 Лейбниц 5
 Ли (S. Lie) 5
 Лооз (O. Loos) 6, 9, 10, 64, 210, 211
 Мальцев А.И. 6
 Монж 5
 Монтгомери (D. Montgomery) 200
 Номидзу (K. Nomizu) 51
 Ньютон 5
 Обата (M. Obata) 28
 Паркер (M. Parker) 207
 Петтит (R.B. Pettit) 110, 119, 207
 Разави (A.K. Razavi) 210, 211
 Рашевский П.К. 220
 Сабинин Л.В. 7
 Сингер <= Зингер> (I.M. Singer) 111
 Степанов Н.А. 72
 Сэмелсон (H. Samelson) 200
 Тварожек (J. Tvarožek) 209
 Туманян (M. Toomanian) 211
 Уинтер (D.J. Winter) 31
 Уоллэч (N. Wallach) 207
 Феденко А.С. 10, 64, 72, 207
 Феруз (D. Ferus) 208
 Хелгасон (S. Helgason) 9
 Черни (J. Černý) 210
 Эвклид 5
 Ямабэ (Yamabe) 78
 Яно (K. Yano) 211

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

аutomорфизм регулярного s -многообразия 65

автопараллельное подмногообразие 113

Амброуза – Сингера теорема 111

аффинная связность 213

– – полная 216

– s -структура 203

аффинное локально-симметрическое пространство 63

– отображение 215

– преобразование 215

– редуktивное пространство 59

– симметрическое пространство 63

бесцентровое риманово инфинитезимальное многообразие 125

Бриккелла теорема 17

Бьянки тождества 52, 214

векторное поле вдоль кривой 215

вертикальное подпространство 212

вес строки (столбца) 152

внешний ковариантный дифференциал 212

главное расслоение реперов 213

горизонтальная кривая 215

горизонтальное подпространство 212

группа голономии 217

– трансвекций аффинного многообразия 55

– – регулярного s -многообразия 77

декартово пространство 223

дистрибутивный группоид 64, 220

дифференцирование (многообразия с умножением) 67

допустимая s -структура 136

замкнутое подмножество собственных чисел 134

замкнутый триплет 52

изоморфизм инфинитезимальных s -многообразий 94

– регулярных s -многообразий 95, 102

инвариантная комплексная структура 108

– калерова структура 108

- почти-комплексная структура 106
- почти-эрмитова структура 107
- инвариантное инфинитезимальное подмногообразие 114
- подмногообразие 113, 114
- слоение 115
- тензорное поле 106
- индуцированная G -инвариантная метрика 26
- интегрируемое тензорное поле 110
- инфинитезимальная модель (локально-) регулярного s -многообразия 95, 103
- инфинитезимальное s -многообразие 94
 - - риманово 103
 - - без центра 125
- инфинитезимальные вращения 128
- инфинитезимальный изоморфизм локально-регулярных s -многообразий 95
- каноническая связность локальной регулярной s -структуры 41, 90
 - - регулярного s -многообразия 65, 70
 - - редуктивного однородного пространства 47
 - - симметрического пространства в смысле Лооза 64
 - форма главного расслоения реперов 214
- каноническое соответствие (между инфинитезимальными s -многообразиями и примарными локально-регулярными s -триплетами) 99

- Картана $(-)$ -связность 59
- квадратичное s -многообразие 207
- квазигруппа левая 219
- Киллинга форма 26
- ковариантная производная 213
- комплексификация обобщённого симметрического пространства 130
- регулярного s -многообразия 128
- кривизны тензорное поле 214
 - форма 213
- кручения тензорное поле 214
 - форма 214
- Леви разложение 121
 - теорема 121
- леводистрибутивный группоид 220
- Леджера формула 70
- Лейбница формула 66
- локальная геодезическая симметрия 15, 63
 - регулярная s -структура 40, 88, 102
 - симметрия 40, 89
- локально-регулярное s -многообразие 89
 - - риманово 102
- локально-регулярный s -триплет 98
 - - примарный 98
 - - эффективный 98
- локальный автоморфизм 89
 - изоморфизм 89, 93
- лоренцево симметрическое пространство 207

- матрица типа δ 152
 метризуемое регулярное s -многообразии 85
 множество собственных чисел
 регулярного s -многообразия 133
- Нейенхёйса тензор 108, 110
 неприводимое аффинное редуктивное пространство 195
 - инфинитезимальное s -многообразии 118
 - множество собственных чисел 135
 - обобщённое аффинное симметрическое пространство 195
 - регулярное s -многообразии 118
- Номидзу теорема 51
- о.а.с.п. 136
 о.п.с.п. 198
 обобщённое аффинное симметрическое пространство 136
 - - - - бесконечного порядка 139
 - - - - конечного порядка 139
 - - - - полупростого типа 140
 - - - - примитивное 140
 - - - - разрешимого типа 140
 - - - - унитарное 139
 - поточечно симметрическое риманово пространство 198
 - симметрическое риманово пространство 23
 - - - - без инфинитезимальных вращений 84
 - - - - собственное 160
 - - эрмитово пространство 127
- опорная точка 217
 опорный репер 217
 основная лемма (в теории собственных чисел) 147
 отмеченная точка 59
 отмеченные собственные числа 142, 180
- параллельное векторное поле (вдоль кривой) 215
 параллельный перенос 215
 Паша аксиома обобщённая 147
 периодическая тензорная структура 154
 подмногообразие инфинитезимального s -многообразия 114
 полупростые симметрии 138
 порядок регулярного однородного s -многообразия 81
 - обобщённого аффинного симметрического пространства 139
 - - поточечно симметрического риманова пространства 198
 - - симметрического риманова пространства 23
 - периодической тензорной структуры 154
 - регулярного s -многообразия 81
 - регулярной s -структуры 139
 - свободной точки 154-155
 - устойчивости 155
 - s -структуры 18
- почти-комплексная структура 105
 почти-кэлерова структура 207
 - почти-эрмитова структура 107
- приводимое инфинитезимальное s -многообразии 118
 - множество собственных чисел 135
 - регулярное s -многообразии 118

- примарное редуktивное однородное пространство 59
 - регулярное однородное s -многообразие 80
 примитивное обобщённое аффинное симметрическое пространство 140
 прямая сумма инфинитезимальных s -многообразий 118
 прямое произведение регулярных s -многообразий 118
 псевдодуальность 131, 132
 псевдориманово симметрическое пространство 207
 пунктированное аффинное многообразие 59
 - регулярное s -многообразие 80

 регулярная s -структура 95, 102
 - - бесконечного порядка 139
 - - параллельная, непараллельная 38, 39, 203
 регулярное однородное s -многообразие 72
 - s -многообразие 65
 - - конечного порядка 81
 - - полупростого типа 120
 - - разрешимого типа 120
 редуktивное однородное пространство 25, 44
 редукции теорема (в теории связностей) 54
 решётчатая точка (в теории собственных чисел) 147
 риманово пространство без инфинитезимальных вращений 84, 129
 - - локально-симметрическое 15
 - - обобщённое симметрическое 23
 - - однородное 23
 - - симметрическое 15
 - - k -симметрическое 23

 самослияние 124
 свободная точка (риманова многообразия) 154
 связность 212
 симилярность (локально-регулярных s -многообразий) 89
 симметрическое подмногообразие эвклидова пространства 208
 - пространство в смысле Лооза 64
 симметрия аффинная 63
 - в точке p 15, 63, 64
 - геодезическая 15, 63
 - дистрибутивного группоида 15, 63
 - локальная 40
 - обобщённая 16, 65
 система собственных чисел (регулярной s -структуры) 144
 - - - отмеченная 180
 слабо инвариантное подмногообразие 117
 - - подпространство 117
 - - тензорное поле 110
 сливающее разложение 124
 слияние 123, 124
 слоение (регулярных s -многообразий, обобщённых симметрических пространств) 115, 122
 собственное обобщённое симметрическое риманово пространство 160
 собственные числа регулярного s -многообразия 133
 сопряжённые подпространства (в теории собственных чисел) 150

структурные уравнения (связности) 213, 214

субсимметрия 219

тензор типа (m, n) 154

трисимметрическое пространство 220

тройная алгебра Ли 220

Фиттинга 0-компонента, 1-компонента 72

– лемма 71

форма кривизны 213

– кручения 214

– связности 213

характеристическое многообразие (в теории собственных чисел) 142

элементарная трансвекция 77

экспоненциальное отображение 216

эрмитова регулярная s -структура 127

эрмитово регулярное s -многообразие 127

k -симметрическое риманово многообразие 23

s -структура 18

– бесконечного порядка 139

– конечного порядка 18, 139

– параллельная 38

– порядка k 18

– регулярная 20, 95, 102

– риманова 18

θ -многообразие (в теории собственных чисел) 148

Σ -пространство 210

– приведённое 210

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

(См. также список стандартных обозначений.)

s_p 15	$\text{Der}(M)$ 67
S_p 15	$x^{-1} \cdot y$ 67
(M, g) 15	$L(v)$ 68
$\{s_x : x \in M\}$ 17	$(M, \{s_x\})$ 71
$\text{Cl}(\{s_x\})$ 17	(G, H, ϵ) 72
$\text{Cl}(s_p)$ 19	g_{0A}, g_{1A} 72
$I(M, p)$ 19	$\text{Tr}(M, \{s_x\})$ 77
$I(M_p)$ 19	$\text{Cl}^a(\{s_x\})$ 85
$O(M_p)$ 19	$\mathcal{A}^n$ 143
$\text{Cl}(S_p)$ 19	$\mathcal{B}^n$ 145
S 20	$\mathcal{E}^n$ 145
$\mathcal{A}(\{s_x\}, p)$ 21	$\mathcal{D}^n$ 146
$G^\epsilon, (G^\epsilon)^\circ$ 24, 72	Λ_n 147, 149
$\text{Tr}(M, \nabla)$ 55	$\mathcal{L}_n$ 147
$\text{Tr}(M)$ 55, 77	ω 212
$\text{Tr}^*(M)$ 57	Ω 213
K_ℓ 59	θ 214
(M, μ) 65	$\oplus$ 214
$\text{Aut}(M)$ 65	

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	5
Предисловие к русскому изданию	8
Предисловие	9
Список стандартных обозначений	13
<u>Глава 0. Обобщённые симметрические римановы пространства</u>	15
Римановы симметрические пространства	15
Римановы s -структуры	16
Регулярные s -структуры	20
Теоремы существования	23
Один трёхмерный пример	34
Разложение де Рама	36
Параллельные и непараллельные s -структуры	38
Каноническая связность	39
<u>Глава I. Редуктивные пространства</u>	44
Редуктивные однородные пространства	44
Каноническая связность	46
Алгебраическая характеристика	51
Группа трансвекций	54
Аффинные редуктивные пространства	59
<u>Глава II. Дифференцируемые S-многообразия</u>	63
Аффинные симметрические пространства	63
Основная теорема	64
Каноническая связность	66

Регулярные однородные s -многообразия	71
Группа трансвекций	77
s -многообразия конечного порядка	81
Римановы регулярные s -структуры	82
Метризуемые регулярные s -многообразия	85
Несвязные регулярные s -многообразия	86
<u>Глава III. Локально-регулярные s-многообразия.</u>	88
Локализация изложенной выше теории	88
Инфинитезимальные s -многообразия	93
Локально-регулярные s -триплеты	97
Построение локально-регулярных s -структур	99
Риманов случай	102
Инвариантные почти-комплексные структуры	105
Приложение. Теорема Амброуза – Сингера	110
<u>Глава IV. Операции с s-многообразиями</u>	113
Подмногообразия и слоения	113
Разложение s -многообразий	118
Периодические s -многообразия	120
Слияния	123
Комплексификации.	127
Пространства без инфинитезимальных вращений	129
Псевдодуальность	131
Свойства собственных чисел	132
<u>Глава V. Отмеченные s-структуры</u>	
<u>на обобщенных симметрических пространствах</u>	136
Обобщённые симметрические пространства аффинной связности	136
Мультипликативная теория собственных чисел	142
Аддитивная теория собственных чисел	146
Приложения и проблемы	153
<u>Глава VI. Классификация обобщённых симметрических</u>	
<u>римановых пространств малых размерностей</u>	157
Процедура классификации	157
Размерность 3	160
Размерность 4	164

Размерность 5	171
Размерность 6	179
 <u>Глава VII. Классификация обобщённых аффинных</u>	
<u>симметрических пространств малых размерностей</u> .	180
Процедура классификации	180
Классификационный список	181
 Добавления	191
Добавление 1. Существование обобщённых симметрических пространств разрешимого типа	191
Добавление 2. Неприводимые обобщённые симметрические пространства	195
Добавление 3. Обобщённые поточно симметрические римановы пространства	198
Добавление 4. Непараллельные s -структуры на симметрических пространствах	203
Добавление 5. Некоторые дальнейшие результаты	206
Добавление 6. Некоторые новые результаты	208
 Приложения	112
Приложение А. Краткий очерк теории связностей	212
Приложение В. Некоторые теоремы дифференциальной геометрии	217
 Примечания переводчика	219
Литература	224
Именной указатель	231
Предметный указатель	232
Указатель обозначений	237

1р 90к

$$\left(\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{array} \right) \rightarrow$$

О.Ковальский. Обобщённые симметричные простейшие